おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第１回授業内容＞

§１　数学的基盤の整備

1）　数の世界の拡がり

（1）　数と数字の違い

（2）　自然数の構造、四則演算

（3）　“０”の導入　＜この途中まで＞

---

§１　数学的基盤の整備

前回お伝えしたとおり、まずは数学の基礎的な部分からゆっくりじっくり固めていきたいと思います。

今回は、その第１回ということで、「数（すう）」という概念についてのお話をメインにしていきます。私たちの身の回りには、さまざまな「数」があふれています。小学校に入った頃、1,2,3,4,⋯⋯という数をまず勉強しました。それからしばらくして、分数や小数も習いましたね。中学では -5 や $\sqrt{2}$ といった数も出てきましたし、高校数学では $5+i$ みたいな数も登場します。
普段私たちの手の届く、見ることのできる数だけでなく、手の届かないところにある数や、目に見えない数を、数学の力でまずはとらえてみましょう。

（ちなみに「数」という字の読み方ですが、さきほどは「すう」とルビをふりましたが、もちろん「すう」と読んでいただいても大丈夫です。どちらが正しい、というつもりは特にありません。「すう」と読んだほうが少しカッコイイかな、という程度の話です。）

1.1　数の世界の拡がり

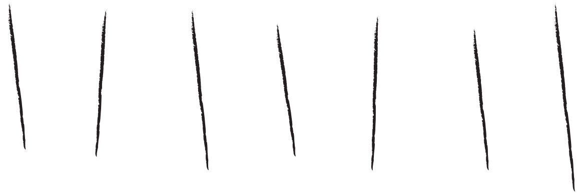
1.1.1　数と数字の違い

そういうわけで、今回はさまざまな種類の「数」の概念について見ていくわけですが、その前にまず「数」と「数字」の違いをはっきりさせておきたいと思います。
「数」と「数字」って同じじゃないの、と思った方も多いでしょう。一般的な認識としては、それでも構いません。しかし、ここで「数」と「数字」を切り離して認識できるように、別物だと認識できるようになることができれば、「“数”学」の世界に少し踏み込むことができるでしょう。

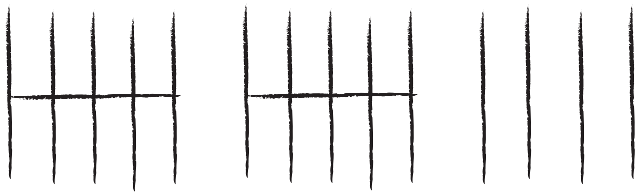
そもそも「数」という概念は、そのままでは人間が知覚することができません。そのあたりをふわふわと漂っていて、人間にはなかなか捉えられない“よくわからないもの”なのです。いやいや、私は1とか2とか知っていますけど、と思う方もいらっしゃると思います。しかしそれは、これまで人類が歴史の中で、「数」という概念に「数字」という＜姿形＞を与えてきた成果なのです。
もう一度前回お話した羊飼いの話を思い出してください。まだ「数字」というものがなかった頃、羊飼いがどうやって羊の数を数えていたか、という話です。羊を柵から出して散歩に連れて行くとき、1匹柵の外に出すごとに、持っている袋に石を1つずつ入れていきます。帰ってくるときは、1匹柵の中に入れるごとに、持っている袋から石を1つずつ捨てていけば、行きと帰りでちゃんと羊の数があっているかどうかがわかります。これは、言ってみれば「数」という概念を直接捉えている状態です。しかしもちろん、この状態ではできることが限られています。連れて行った数と連れて帰った数の違いはわかりますが、たとえば昨日と今日の羊の数の違いはどうやって把握すればいいのでしょう。1匹、2匹、って数えておけばいいじゃん、と私たちなら思いますが、それは「数字」を知っているから言えることです。今は「数字」を知らない時代のことを想像してください。よしそれじゃあ、毎日その日の終りに羊の数だけ石を入れた袋を置いておこう、と。そうすると確かに、昨日と今日の数の違いを把握することはできます。しかし、それをずっと続けていこうとすると、倉庫は石の入った袋でいっぱいになります。そのうち、家の周りに石がなくなってしまうかもしれません。いつ

の間にか袋から石がこぼれてしまい、正確な「数」ではなくなっているかもしれません。とても不便です。

しかし、人間もバカではありません。いろんなことを考えます。別に石を拾わなくても、木にその数だけ傷をつけたりしておけばいいんじゃないか、とか。そうすると、置いておく場所にはあまり困らなくなりますし、いつの間にか「数」が変わっていた、ということも防げます。



そうこうしていると、今度は、たくさん書くのも面倒くさいよ！、となってくるでしょう。そうすると、いくつかをひとまとまりにしてしまおう、というアイディアも出てきます。



たとえば、5つずつでひとまとまりにしてみました。そうすると、あとからこの形を見たときに「5つ分」というのがわかるようになりました。これがある意味での「数字」の誕生です。「5」という「数」を表す“記号”ができたわけです。そうして、この「5」を表す記号が他者とも共有されるようになると、人類は「数字」という道具を獲得したことになるのです。

つまり、数字、というのは「数」に対して人類が与えた「記号」であり、「どういう“数”をどう表すか」という人類の中での取り決めに過ぎません。その証拠に、同じ「数」を表す記号であっても、文化が違えば別の記号になることがあります。私たちがよく知っている「5」という数字以外にも、古くローマでは「V」と表わされることもありましたし、現代の日本でさえ「五」という表現方法もあります。どれが正しい表し方、というわけではありません。単純に、どの文化の中で通用するか、というだけの話です。しかし、「5」と表そうと「五」と表そうと、それによって示されている「数」そのものは変わりません。この“変わらないもの”が「数字」から切り離された「数」という概念なのです。（ちなみに、人類は「数」に対して「数字」という＜姿形＞を与えたと同時に、「数詞」という＜名前＞も与えまし

た。「数詞」というのは、それを今度は口頭ではどう表現するか、ということです。たとえば、「いち」「に」や、「わん」「つー」や、「あいん」「つばい」など。こちらも当然、文化によって違っています。）

さて、ここで一つ問題です。

【Question1】

以下の計算をしてください。ただし、それぞれの記号は、次のような数を表すものとします。○：1、▲：2、◇：3、☆：4、●：5、□：6、▽：7、△：8、◎：9、■：0（たとえば、「◎□」は 96 を表します。）

(1)　▲□＋●☆＝

(2)　◎■▽－◇△＝

一つ一つの記号を、私たちのよく知っているアラビア数字に置き換えて計算していきます。もちろん、答えは○や△といった記号で表してください。解けた方は、自分で正しい計算式を作ってみることにも挑戦してみてください。

それでは解説です。

(1)　$26 + 56$ となるので、答えは 80 であり、△■となります。

(2)　$907 - 38$ となり、答えは 869、つまり△□◎です。

いかがでしたでしょうか。ある意味ではこの記号も「数字」の一種です。もちろん、私とみなさんの間だけでしか通用しないものではありますが。

アラビア数字だと簡単にできる計算でも、「数字」が変わるととても難しく感じるでしょう。しかし今やっていただいた“数字”の操作と、普段みなさんが簡単にやっているアラビア数字を使った計算は、本質的にはあまり変わりません。つまり、普段みなさんはそんな難しいことを簡単にやっているわけです。どうしてそういうことができるか、というと、もちろん、アラビア数字が“数字”としてとても扱い易いシステムであるから、ということもあるのですが、それ以上に、やはり「慣れ」のおかげでしょう。小学校のころに散々やらされた、計算練習のおかげ、ということです。

数学では、目に見えない“数”に記号を与え、それを操作していきます。

数学がだんだんと難しくなるのは、この「慣れていない操作」が増えていくからだ、と言うこともできます。（余談ではありますが、中学・高校あたりから数学が難しくなるのは、扱う“数”の世界が急速に広がっていくのに対して、その操作の練習量が増えるどころか減る一方だから、ということもある気がします。成長してくると小学生のころのように素直にトレーニングをしなくなるというか、飽きてくるというか、まあ他に楽しいことが増えてくるということかもしれません。）

本講座でも、さまざまな“数”は出てきますし、それの操作もしていただきます。面倒くさくて投げ出したくなることも多々あると思いますが、その気持ちを一度飲み込んでいただいて、今、上の問題でやっていただいたように、一つ一つ根気よく丁寧に操作するようにしてください。

さて。

そういうわけで、「数」と「数字」が違う、というお話をしてきましたが、そうすると、「同じ数」なのに表現の仕方が違う、ということが起きてきます。もう一問ちょっとしたクイズをやってみましょう。

【Question2】

以下の「数字」の中に、表している「数」が違うものが1つあります。それはどれでしょう。

$$10 \qquad 十 \qquad \mathrm{X} \qquad \mathrm{A} \qquad \frac{50}{5} \qquad 4+5$$

さまざまな表現をしていますが、6つのうち5つは同じ「数」を表しています。いかがでしょうか。答えはわかりましたか。

特に引っ掛けなどはなく、答えは6つ目の「4＋5」です。XやAなどがどういう意味かわからなくても、1つ目と2つ目、それと5つ目はあきらかに「10」ですし、6つ目はあきらかに「10」ではないですね。仲間はずれがひとつだけ、というなら、これが答えでしょう。ちなみにXはローマ数字の「10」、Aは16進法で「10」です。このように、同じ「数」であってもさまざまな表現をすることはあります。もちろん、一般的には最もシンプルな形、最も伝わりやすい形で表現しよう、というのがルール（マナー）です。小学校のテストで、分数の約分を忘れると減点されたりした経験もある方

もいらっしゃると思うのですが、あれは「思いやりが不足していますよ」という減点です。（そういう意味では、数学的な減点ではない、ということでもありますが。）　小数と分数のように（たとえば0.5と$\frac{1}{2}$など）どちらがシンプル、と言えない場合は、用途によって使い分けてください。

ところで、この問題自体はただのお遊びですが、「$4+5$」という表現にちょっとひっかかりませんでしたか。これを見たとき、これ計算の途中じゃないの？と思いませんでしたか。もっと言ってしまえば、つまりいくらのことなんだよ、とか、結局9なんだから最初から9って書いてよ、とか。しかし、こういう表現でも「数」を表していることには変わりません。なぜそこを強調するかというと、こういう表現でしか表せない「数」もこれからたくさんでてくるからです。たとえば、

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

この数はこれ以上シンプルに表現することは不可能です。計算していくらになるのだろう、とか、それって結局いくつのことなんだよ、と考えてしまうと、この“数”を捉えることはできません。だいたいの大きさであれば、計算することはできます。$\sqrt{3}$が$1.73\cdots$くらい、$\sqrt{5}$が$2.23\cdots$くらいですので、上記は「だいたい4弱」ということはできます。しかし、この数を正確に捉え、数学的に扱うには、上記の形のままで考えるしかありません。数学の勉強を進めていくと、こういった一見すると計算の途中のようにも見える“数”がたくさん出てきます。$\sqrt{3}+\sqrt{5}$はまだ「だいたいの大きさ」を考えることができましたが、複素数など、それさえも考えることができない数も登場します。そういった数にであったとき、まずは意味を考えることが重要です。たとえば、$\sqrt{3}+\sqrt{5}$は「2回かけると3になる数と2回かけると5になる数を足した数」というようにとらえましょう。そして、その意味が捉えられたら、それで十分なのです。

数学は、そのままでは認識できない「数」という概念を一生懸命とらえ、記号を使うことでどうにかこうにかかろうじて認識できるようにしてきました。当然、まだ認識できていない「数」というのもたくさんあると思いますし、ようやく捉えられた「数」の中には、シンプルに表現できないものもたくさんあります。数学を勉強する上で重要な事は、そうやってなんとか手の届くところに持ってきてくれた先人の努力に感謝しつつ、そこま

で手を伸ばす努力をする、ということだと思います。

＜まとめ＞
・　数と数字は、それぞれ別のものであり、私たちは「数字」を通して「数」という概念の一部を認識しているだけにすぎない。
・　同じ「数」でも、表記の方法が複数ある場合がある。
・　シンプルに表現できない「数」もあり、それを捉えるには意味を考えることが大事である。
・　数学は未だ見えていない「数」を探求していく活動でもある。

1.1.2　自然数の構造と四則演算

それではここから、「数」の概念を順に拡げていきます。
まずは全ての「数」の根本に位置づけられる「自然数」から見ていきましょう。自然数とは「物を数えるための数」、具体的に言うと 1,2,3,4,……という数のことです。皆さん見慣れている数ですね。見慣れているだけに、逆にその本質を捉えることが難しい数でもあります。
自然数以外の数は、自然数と関連付けて捉えていくことができます。しかし、自然数は他の数に寄らずに捉える必要があります。もちろん、自然数そのものにも。言ってしまえば、普段使っている数字の存在しない世界をイメージし、その中で概念を組み立ていかないといけないのです。とても難しいことですね。
この取組はとても難しく、事実、この「自然数」の構造を人類が数学的にとらえられるようになったのは、19 世紀の終わりになってからです。イタリアのジュゼッペ・ペアノ（Giuseppe Peano　1858～1932）という人が、1891 年「ペアノの公理」というものを発表しました。
「1＋1 はなぜ 2 になるのか」という疑問をもつ小学生の話はよく聞きますが、数学者たちはさらにそこから踏み込んで、「1＋1 ＝ 2 になる自然数の構造とは、いったいどういうものなのか」と考えたのです。

それでは、私たちはこれから、その数学的成果の力を借りて、「自然数」の構造を一緒に見ていきたいと思います。

＜ペアノの公理＞

P1　1は自然数である

P2　nが自然数であれば、nの次の数（n'）も自然数である

P3　n'＝1となるnは存在しない

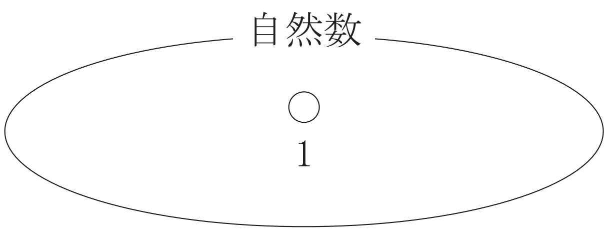
P4　$n \neq m$ならば$n' \neq m'$である

（$n' = m'$ならば$n = m$である）

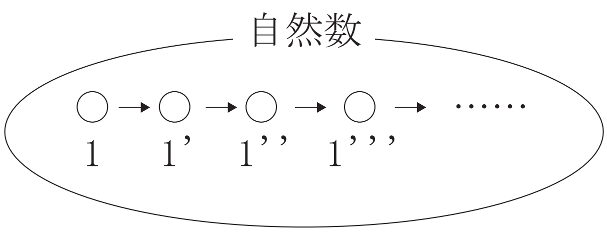
P5　1がある条件を満たし、nがある条件を満たせばn'もある条件を満たすとき、すべての自然数はその条件を満たす。

こう書かれても、さっぱりなんのことかわからないと思います。1つ目から順に見ていきましょう。まずは今まで知っていたはずの「自然数」をすべて忘れてください。「3」とか書かれても、なにかふにゃふにゃした線があるなあ、と思うのです。いいですか。

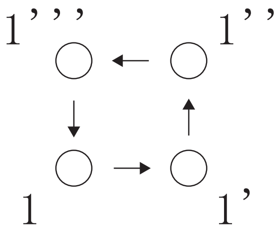
ひとつめ。1は自然数である。「当たり前では？」と思ってはいけません。「へえ、棒線1本で表されるものが自然数の中にあるんだ」と思ってくださいね。ちなみにここで言おうとしているのは、要するに「自然数には起点がある」ということです。この起点を「1」という記号・名前で表しますよ、と。



次にふたつめの条件を見てみます。nが自然数であれば、nの次の数（n'）も自然数である。これも、1が自然数なら2も自然数で、2も自然数なら3も自然数で……ということではありません。私たちはまだ「2」も「3」も知らないからです。「1」が自然数だということはひとつめの条件で知りましたので、その次の数1' も自然数である、ということは言えます。1' が自然数、ということが言えると、その次の数1” も自然数である、ということも言えます。

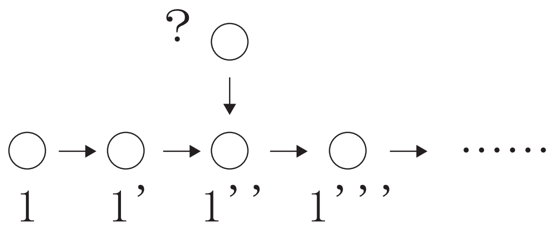


私たちが知っている自然数の構造に近づいてきましたね。しかしこの1と2の条件だけでは、たとえばこういう構造を作ることもできます。



1''' の次の数も自然数であるが、
この数が既に登場している数（1）
である場合、ループする構造になる

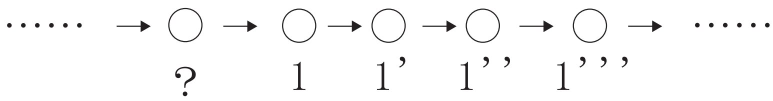
しかし、自然数はこういう構造ではありませんよね。そこで新しく条件を加えていきます。先に4つ目の条件を見てください。$n \neq m$ ならば $n' \neq m'$ である。つまり、「次の数」どうしが違えば、もとの数どうしも違う数ですよ、と。ここは少し難しいのですが、たとえば、同じ「次の数」をもつ数が複数あったとき、どういう構造になるか考えてみてください。先ほどの図の＜ループ＞や、以下のような＜合流＞が可能になってしまいます。



1から始まるライン以外にも
数が存在するかもしれない
1' だけでなく？の次の数も 1'' なら、
そういった数が合流してくることになる

4つ目の条件で、そういう数はないよ、と言っているので、これらの構造を排除できます。

そして3つ目の条件。$n' = 1$ となるnは存在しない。これは、起点となっている「1」よりも前に自然数はないですよ、ということですね。もし「1」よりも前に自然数があると、こんな感じの構造も可能になってしまいますね。



それを3つ目の条件で禁止しています。

最後に5つ目の条件、「1がある条件を満たし、n がある条件を満たせば n' もある条件を満たすとき、すべての自然数はその条件を満たす」です。これについてはいろいろと解釈できますが、要するに、この出来上がったラインの外には自然数はないよ、ということでもあります。

これで自然数の構造を数学的にとらえることができました。このそれぞれの自然数に、1,2,3,4……という記号を割り振ったものが、今私たちが自然に使っている「自然数」ということですね。

$\bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \cdots\cdots$

$1 \quad \cancel{1'} \quad \cancel{1''} \quad \cancel{1'''}$

$\quad\ \ 2 \quad\ \ 3 \quad\ \ 4$

というわけで、自然数の構造が見えてきました。大事なことは、「起点」と「その次の数」という概念だけでこの構造を作り上げていることです。つまり、「数字」という記号から、「数」の本質を切り出すことができたのです。

さて、それでは自然数の構造を数学的に捉えられたところで、次は各種の演算についても数学的にとらえていきましょう。演算、というのは計算方法のことで、四則演算、とも言うように、平たく言うと「たし算（加法)、引き算（減法)、掛け算（乗法)、割り算（除法)」の 4 つのことです。

ここから先も、たし算や引き算などについては、まだ知らない、ということにしながら進めていってください。今私たちが知っていることは、自然数の構造だけです。(1 の次は 2、2 の次は 3、……ということは先ほど“知った”ので使っても構いません。)

もちろん、どういう条件を与えれば適切な「たし算」の構造になるのか、というのを考えていくのが本来の数学であり、これまでの数学者がたどってきた道ではあるのですが、本講座では先人の知恵を拝借して、「最終的にはこういう条件でうまく構造を捕まえたらしい」というご紹介にとどめておきたいと思います。みなさんは、実際に手を動かして「その条件が上手く構造を捉えている」ことを確認してください。

＜加法＞

1　すべての n に対して、$n+1=n'$ が成立する

2　すべての n,m に対して、$n+m'=(n+m)'$

まずはたし算ですが、記号と数式がいっぱいで、どういうことかわかりづらいですよね。そんなときは、具体的に考えてみることがとても大事です。

たとえば、$2+3$ を考えてみましょう。一応「+」の記号はまだ知らない、ということになっていますけども、それは少し置いておくと、この計算は 5 にならなければいけないな、というのはなんとなくわかりますね。ちなみに、自分でたし算の構造を考えていく場合は、考えた条件どおりに計算してみて上手く 5 にならなければ、条件を考えなおさなければいけません。自

然数の構造を決めていくときと同じです。私たちが認識している数の構造や計算結果と違ったら、条件を書きなおしたり新しく加えたりしなければいけません。その試行錯誤の結果として、ペアノの定理や上記のような加法の定義が数学的成果として存在するのです。（もちろん、これらは既に数学的な成果として既に認められているものなので、みなさんが上記の条件のとおりに計算してみて思うような計算結果を得られなかった場合は、単に計算間違いです。）

さて、それで$2+3$ですが

$2+3$

$=(2+2)'$

$=(2+1)''$　　←　$2+2$は$2+1'$なので、$(2+1)$の次の数、となります

$=2'''$　　←　これは5ですね。うまくいきました。

最初の等号の前後は、「2と2の次の数をあわせると、（2+2）という数の次の数になる」というふうに捉えましょう。「（2+2）という数」というとらえ方は、今日の講義の最初のほうでやりましたね。

それでは皆さんも実際にやってみてください。繰り返して言いますが、自分の手を動かして、実際に確認してみることが大事です。

【Question3】

$3+5=$

【解説】

$3+5=(3+4)'=(3+3)''=(3+2)'''=(3+1)''''=3'''''=8$

他にも、いくつかの例で試してみてください。

数式を見ているだけでは、「確かにそうなるんだろうけど、なんだかよくわからないなあ」と思うでしょう。しかし、実際に手を動かしてみると、いろいろなことがわかります。計算していった最後の形を見てください。たとえば、$3+5$の最後の形は$3'''''$となっています。これはその意味を考えると、「5を足す」というのが「5つ次の数」に変換された、と捉えることができます。つまり、自然数の加法というのは「いくつ次に移動するか」というイメージのものなのです。

さて、加法を上記のようにとらえると、重要な法則が2つ成り立ちます。その2つの法則、交換法則と結合法則をここで確認しておきましょう

交換法則　$a+b=b+a$
結合法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$

できれば証明をしておいた方がいいと思うのですが、今回は確認だけということにしておきます。交換法則は $2+3$ と $3+2$ で、結合法則は $(2+3)+5$ と $2+(3+5)$ でそれぞれ具体的に確認してみましょうか。（具体的にどうなるかは講義中にはやりましたが、ここでは省略します。【問題3】と同じように丁寧にやってみてください。）

散々面倒な計算をやっていただきましたが、これから先たし算はずっとこの計算でやらないといけないか、というと、そういうわけではありません。きちんと数学的な裏付けがとれた、ということで、今までどおりに計算していただいて大丈夫です。しかし、あくまで「自然数のたし算」については、ですけども。

さて次は引き算、といいたいのですが、そのまえに大小関係も定義しておきます。「大きい」とか「小さい」というのも、今のところ私たちは知りません。きちんと数学的に条件を与えなければいけないのです。大小関係についての定義は以下の通りです。

＜大小関係の定義＞
$a+k=b$ となる自然数 k が存在するとき、$a<b$ である
（a は b より小さい、b は a より大きい、と言う）

たとえば、5と7でどちらが大きいか考えてみましょう。たし算は先ほど定義されたので、普段通り使っていいですよ。

5+? = 7としたとき、？に入る自然数はあるでしょうか。これはありますね、2です。ということは5よりも7のほうが大きい、ということになります。

【Question4】
$3<5$ を証明してください

証明してください、というのは、数学的に許された手続きだけを使って結論を導いてください、ということです。2つの自然数を比べたときにどちらが大きいか、というのは、数学的に判断する基準を先ほど作ったのでした。これを利用しましょう。

【解説】
$3 + k = 5$ となる k が存在する（具体的には2）ので、$3 < 5$ となる。

＜減法＞
それでは減法にいきます。減法は加法の逆演算として定義されています。

$n + x = m$ であるとき、$m - n = x$

つまり、どういうことかというと、$m - n$ を考える、というのは、n に何をたせば m になるか考える、ということです。具体的に言うと、たとえば $5 - 3$ というのは、「3に何を足せば5になるか」ということです。

【Question5】
$3 - 5 \neq 2$ を証明してください

小学生を見ていたりすると、引けないときに数字だけ比べて、無理やり大きい方から小さい方を引いたりする子がいます。今回も「証明してください」ですが、この問題の場合は、$3 - 5$ が2だったらおかしいよ、ということを、やはり引き算の定義を使って言ってみます。

【解説】
$3 - 5 = 2$ ならば、$5 + 2 = 3$ となってしまうので不適。よって $3 - 5 \neq 2$。

今の話の流れでは「0」は知らないことになっているのですが、$3 - 5 \neq 0$ にもなりますね。そこで、じゃあ $3-5$ ってなんだろう、と考えると、あれ？となってしまうので、そこで数の概念を拡張しなければいけなくなるのですが、その話はまたあとで（負の数）。

これで、引き算も使えるようになりました。（ただし、答えが自然数に収まる範囲内で。）

＜乗法＞
次は乗法です。

1　すべての n に対して、$n\times 1 = n$ が成立する
2　すべての n,m に対して、$n\times m' = n\times m + n$

やはりこれも具体的に確認してみましょう。

2×5　　←　$2\times 4'$ と考える
$= 2\times 4 + 2$　　←　2つ目の条件の n に2、m に4を入れてみる
$= 2\times 3 + 2 + 2$
$= 2\times 2 + 2 + 2 + 2$
$= 2\times 1 + 2 + 2 + 2 + 2$
$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2$　　←　1つ目の条件から、$2\times 1 = 2$
$= 10$

それではみなさんも実際に手を動かしてみましょう。（解説は省略します。）

【Question6】
$3\times 5 =$

「たし算」は「いくつ次に移動するか」というイメージでしたか、掛け算はどうでしょう。2×5 の例では、最終的に $2+2+2+2+2$ になりました。これはつまり、「2×5」が「2を5回たす」になった、ということです。つまり、自然数の掛け算は「同じ数を何回たすか」というイメージだということができます。
たし算のときに交換法則と結合法則が成立したように、掛け算でも交換法則、結合法則、そしてそれらに加えて分配法則が成立します。こちらも実際に手を動かして確認してみてください。

交換法則　：　$a\times b = b\times a$
結合法則　：　$(a\times b)\times c = a\times (b\times c)$
分配法則　：　$(a+b)\times m = a\times m + b\times m$

＜除法＞
最後に除法（割り算）です。除法は乗法の逆演算です。つまり、たし算と引き算の関係、掛け算とわり算の関係、というのはそれぞれ似たようなもの、ということです。ちなみに、ここでいう割り算は、余りを出さないほうの割り算のことです。小学校の算数では、同じ「÷」という記号を使うので、同じような感じに教えられますが、数学的には全く別の演算です。余りを考えるほうの割り算、というのは本講座では扱わないつもりですが、気になる方はまた別途質問してください。

$n\times x = m$であるとき、$m\div n = x$

減法のときと同じような感じで、$m\div n$を考える、というのは、nに何をかければmになるか考える、と解釈していただければいいと思います。一応具体例を確認しておきましょう

$6\div 2 = x$

これは、$2\times x = 6$と考えるので、答えは3ですね。

割り算の場合も、答えを自然数の中で探そうとすると、見つからないものが出てきます。こちらも減法の時と同じく、「数」の概念を拡張してあげる必要があります。（「有理数」のところでやります。）

というわけで、普段私たちが当たり前のように扱っている「自然数」について、その構造や計算方法を数学的に捉え直してみました。もちろん、こんな面倒なことをしなくても、計算などは普通にできるわけです。事実として、ペアノの公理が発表されるより以前でも、人類は自然数を扱い、四則演算も普通に行っていました。しかし一方で、何かがひっかかる、本当

にそうなるのか、どういうシステムになっているのか、という意識はどこかにあったのでしょう。自然数の構造を数学的に分析する、というのは、ある意味では「1+1がなぜ2になるのか」という質問に対する一つの答えになるのです。

＜まとめ＞

- 「起点」と「次の数」という考え方によって、自然数の構造は定義できる。（ペアノの公理）
- 加法を定義すると、交換法則、結合法則が成立する。
- 減法は加法の逆演算であるが、一部の減法の答えは自然数の中に存在しない。（負の数）
- 乗法を定義すると、交換法則、結合法則、分配法則が成立する。
- 除法は乗法の逆演算であるが、一部の除法の答えは自然数の中に存在しない。（有理数）

1.1.3　“0”の導入

自然数についてのお話がひと通り終わったところで、その「数」の構造をほんの少しだけ拡張します。つまり、0の導入です。

自然数と同じように、0という数も、何となく存在を認識される期間があり、記号などを与えられて計算が可能になる時期があり、最終的には数学の中に取り込まれていきます。0という数の来歴もいろいろと調べていくと面白いですが、今回は主に自然数の中にどうやって0を位置づけていくか、ということをメインにお話していきたいと思います。もちろん、先ほどペアノの公理で作り上げた自然数の構造の中に、ということです。

先ほど、ペアノの公理で見た自然数の構造は、こんな感じでした。

$$\begin{array}{ccccccccc} \bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \cdots\cdots \\ 1 & & \cancel{1'} & & \cancel{1''} & & \cancel{1'''} & & \\ & & 2 & & 3 & & 4 & & \end{array}$$

これに0を付け加えてみましょう。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \bigcirc & \to & \cdots\cdots \\
0 & & 1 & & \cancel{1'} & & \cancel{1''} & & \cancel{1'''} & & \\
 & & & & 2 & & 3 & & 4 & &
\end{array}$$

ほとんど構造が変わりませんね。というより、実質一緒だと言っても大丈夫そうです。それでは、それに合いそうな形で、ペアノの公理の方を少しだけ書き換えてみましょう。

＜0を含めた自然数の構造＞

1　0は自然数である

2　nが自然数であれば、nの次の数（n'）も自然数である

3　$n'=0$となるnは存在しない

4　$n \neq m$ならば$n' \neq m'$である

（$n'=m'$ならば$n=m$である）

5　0がある条件を満たし、nがある条件を満たせばn'もある条件を満たすとき、すべての自然数はその条件を満たす。

書き換えたのは、1つ目と3つ目（と5つ目）です。「起点」が1ではなくなり0になったので、それにあわせて1つ目の条件を書き換えました（同じく5つ目の条件も書き換えました）。3つ目の条件については、1がスタートなら「1より前の数は存在しない」でよかったのですが、0を加えると、1より前の数として0ができてしまいます。0より前の数はありませんので、ここを「0の前の数はない」というふうに書き換えました。

これで大丈夫ですね。あっさりでしたが、これで0を含めた自然数の構造ができあがりました。（場合によっては、この0まで含めた形を「ペアノの公理」と呼ぶこともあります。）

ちなみに、構造としてはゼロを自然数に含めても含めなくても見ての通りほとんど変わりませんが、「自然数」という言葉の意味の中に0を含めるかどうか、というのには少し議論があります。一応、日本の学校のカリキュラムでは、自然数は1以上、つまり0を含めない、ということになっていますが、それ以外のところでは「自然数に0を含める」という文化もあります。そのあたりは、どう約束するか、という話であって、本質的にどちらが正解、というわけではありません。ここでは、0まで含んでも構造としては大きく変化しないよ、ということだけ理解していただければいいかな、と思います。

さてもちろん、構造が把握できたら、次は演算を定義していきます。ここで考えることは、新しく定義を付け加える必要があるか、ということです。数学の世界を拡げていくとき、加えていく条件は必要最低限にする、というのがお約束です。早い話が、なるべく新しい定義は付け加えたくないわけです。そこで、まずは今ある定義で運用できないかどうかを確認してみましょう。

＜加法＞
自然数での加法は、

1　すべての n に対して、$n+1=n'$ が成立する
2　すべての n,m に対して、$n+m'=$（$n+m)'$

でした。この条件だけで、0 を含んだたし算もできるかどうかを考えます。

たとえば、上の式の n を 0 にしてみましょう。$0+1=0'(=1)$ となります。これは大丈夫ですね。$0+3$ はどうでしょう。

$$0+3=(0+2)'=(0+1)''=1''=3$$

これも大丈夫ですね。最後、右の数が 0 になるまでやらないのか、と思うかもしれませんが、今のところはこうするしかありません。1 つ目の条件が「+1」しか定義していないからです。
0 が後ろに来るパターン、たとえば $3+0$ ならどうでしょう。今までと同じように、m' を 0 としてみよう……と考えてしまうと、0 より前の数はないのでした。これを考えるには少しだけテクニックが必要です。つまり、等号の左側だけに「考えたい数」を作ることを考えるのではなく、“与えられた等式のどこか”に考えたい数の形を登場させる、ということを考えるのです。この場合だと、2 つ目の条件の n に 3、m に 0 を入れてみます。そうすると、こうなります。

$$3+0'=(3+0)'$$

この式の左側は、$3+0'=3+1=4=3'$ですので、等式としては、「3の次の数と（3+0）の次の数が同じ」となります。ペアノの公理の4つ目の条件を見ると、次の数同士が同じなら、元の数同士もおなじになるので、

$3=3+0$　　（$3+0=3$）

となります。

さて先ほど、$0+3$を考えるとき、

$0+3=(0+2)'=(0+1)''\underline{=(0+0)'''=0'''}=3$

としたほうが自然だ、と感じたのでした。しかし、加法を定義する1つ目の条件が「+1」しか定義していないので、「+0」まで落としてしまうと計算が出来なくなってしまいます。そこで、加法の条件をこう書き換えてみます。

1　すべてのnに対して、$\underline{n+0=n}$が成立する
2　すべてのn,mに対して、$n+m'=$（$n+m)'$

これで「+0」が定義できたので、無事0まで降りていくことが出来るようになりました。しかし待ってください、それで本当にいいのか、と、せっかく上手くいってた演算のシステムが崩れるんじゃないか、と思いましたか。思ってくださいね。そう思ったら、確認してみることが大事です。もちろん、$3+5$のような普通の計算で確認していただいてもいいのですが、今回はもともと存在した「$n+1=n'$」の式を作れないか、と考えてみましょう。この式が復活すれば、今までできていた計算は元通りできるはずです。2つ目の条件を考えると、

$n+1=n+0'=(n+0)'=n'$

これで大丈夫です。
ということで、自然数に0を加えても、加法については新しく条件をつけ加える必要はありませんでした。数学では世界を拡張するとき、必要最低

限の条件だけ付け加えるお約束だと言いましたが、逆に言うと、少ない条件で世界を拡張できるとき、もとの構造自体が“数学的に優秀”だということができます。そういう意味で、一見複雑に見えるペアノの公理や四則演算の定義が、どうしてああいう形をしているのか、その“優秀さ”がこれからだんだんわかってくることでしょう。

それではここで今日の講義を終了します。次回は0を含む減法から入りたいと思います。

【Question7】　（この問題は応用問題ですので、ご質問等ありましたらまた講義中や前後の時間でうけつけます）
$n+0=$
(※　$0+n=$)
$0+0=$

＜まとめ（ここまで）＞
・　0を自然数の中に位置づけても、「数」の構造は変わらない。
・　自然数のみの加法から、0を含む数の加法へは、新しく条件を付け加える必要がない。