おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第2回授業内容＞

§1　数学的基盤の整備

1）　数の世界の拡がり

（3）　“0”の導入　＜この途中から＞

（4）　負数への拡張

---

§1　数学的基盤の整備

1.1　数の世界の拡がり

1.1.3　“0”の導入

本日の講義は、0を含む減法から入りたいと思います。今回も前回と同様、「なにもないところから順に定義していく」という手順でやりますので、定義していない計算に関しては、「知らない振り」をしておいてください。今のところ、皆さんが「知っている」のは、自然数同士の四則演算と、0が絡む場合は加法（たし算）だけです。それではいきましょう。

＜減法＞

自然数のとき、減法（引き算）は加法の逆、というふうに考えました。この考え方で0が絡んだ減法ができるかどうか、まず見てみましょう。

$n+x=m$ であるとき、$m-n=x$

例えば、$3-0$ を考えてみましょう。$3-0=?$ としておくと、上のとおりに考えて、$0+?=3$ となりますね。0に何を足せば3になるのか、と。0を

含む加法は既にやっていますので、普通に考えていただいて大丈夫です。つまり3ですね。期待していた通りの結果になりました。

それでは3以外の数字でも本当にそうなるのかどうか、確認していきます。すべての数字を順に調べていくことは不可能ですから、文字を使っていきましょう。

【Question8】　（以下のnは自然数であるものとします。）
$n-0=$
$0-n=$
$0-0=$

【解説】
・　$n-0=?$　→　$0+?=n$　となり、「0に何をたせばnになるか」を考えます。これは当然「n」ですね。
・　$0-n=?$　→　$n+?=0$　となり、「nに何をたせば0になるか」を考えるのですが、自然数のなかでそういった数はありません。現状ではここは「解なし」としておきましょう。
・　$0-0=?$　→　$0+?=0$　となり、「0に何をたせば0になるか」を考えます。これは当然「0」です。

特に難しいところはないでしょう。$0-n$は、小さい数から大きい数を引く計算同様、自然数、そしてゼロを含めてもまだそのなかでは答えが出せない、ということになりました。それ以外の計算については、自然数のときと同じように計算出来ました。

＜乗法＞
さて、次に乗法です。これもまずは自然数のときに提示した式をそのまま引っ張ってきましょう。

1　$n\times 1=n$
2　$n\times m'=n\times m+n$
（2の式のm'は「mの次の数」という意味でした。）

そしてやはり具体的に見て行きましょう。たとえば、$0\times\ 3$を考えます。

$0\times\ 3$
$=0\times 2+0$　←　上記2の式のnに0、mに2を入れた形です。
$=0\times 1+0+0$　←　「0×2」の部分が「$0\times 1+0$」になりました。
$=0+0+0$　←　上記1式より、$0\times 1=0$です。
$=0$　←　0を含むたし算は既にやりました。

ということで、学校で教わったとおり、0×3がちゃんと0になりました。

続いてこれをひっくり返したパターン、3×0も考えてみましょう。もちろん、乗法には交換法則がなりたつので、$0\times 3=0$ならば3×0も0だろう、と考えることはできますが、ここは考え方の幅を拡げるために、少し違う方法で考えてみます。

3×0を2の式にあてはめてみようとすると、$m'=0$とする必要があり、そうすると「mの次の数」が0となってしまい、そんな数は存在しませんでした。ここで前回の加法のときに使ったテクニックを思い出してください。「3×0」という数の値を知りたいとき、この形を含んだ式を作りたいのですが、それは別に式の左辺（等号より左側）とは限りませんでした。そこで今回も右辺に登場させてみましょう。2の式のnが3、mが0のときを考えてみます。

$3\times 0'=3\times 0+3$
$3\times 1=3\times 0+3$
$3=3\times 0+3$

となり、「3に3×0の値を足すと3」、つまり、$3\times 0=0$、とわかります。

ついでにもう一つ、別の考え方も見ておきましょう。

$n\times m'=n\times m+n$

この式が成り立つ、ということは、$n\times m'-n=n\times m$です。なぜなら、$n\times m'-n$というのは、nに何を足せば$n\times m'$になるのか、ということだったからです。これを利用すると（これのmに0を入れると）、

$n \times 0' - n = n \times 0$

$n \times 1 - n = n \times 0$

$n - n = n \times 0$

$0 = n \times 0$

となります。
それでは文字を使って一般化してみましょう。

【Question9】　（n は自然数とします。）

$n\times\ 0 =$

$0\times\ n =$

$0\times\ 0 =$

【解説】

・　$n\times\ 0 =$

→　先程と同様、$n \times 0' = n \times 0 + n$　の形で考えてみましょう。そうすると、$0'$（0 の次の数）は 1 なので、$n \times 1 = n \times 0 + n$ となり、$n \times 0$ は「n にたすと $n \times 1 (= n)$ になる値」となり、これは 0 になります。

・　$0\times\ n =$

→　こちらは正確に表現すると難しいですが、2 の式を繰り返し運用すると、

$0\times\ n$

$= 0 \times (n\text{の前の数}) + 0$

$= 0 \times (n\text{の前の前の数}) + 0 + 0$

……

$= 0 \times 1 + 0 + \cdots\cdots + 0$　　（0 の数は n より 1 少ない個数）

$= 0 + 0 + \cdots\cdots + 0$　　（0 の数は n 個）

となるので、答えは 0 になります。

・　$0\times\ 0 =$

→　こちらは 1 つ目の計算と同じようにやればいいですね。$0\times1 = 0\times0+0$。0×0 は「0 にたすと 0×1 になる値」となります。0×1 は一つ上の $0\times n = 0$ を利用すると 0 になるので、0×0 の値も 0 です。

さて、$0 \times n$ を考えるとき、順番に下がっていきますが、最後は 0×1 までで止めました。なぜなら 0×0 までいってしまうと、その値はまだ定義されていなかったからです。（上の計算でようやく 0 になるということが確認されましたが。） 加法の時も同じようなことが起こり、違和感がある、ということで $+1$ ではなく $+0$ を定義しなおした のを覚えているでしょうか。同様に今回乗法でも、やはり $\times 1$ ではなくて $\times 0$ を定義してみましょう。

1 すべての n に対して、$n \times 1 = n$ が成立する
→ すべての n に対して、$n \times 0 = 0$ が成立する

もちろん、この条件で今までと同じように計算できるかどうかを確認しなければいけません。たとえば、2×3 を考えてみましょう。

$$
\begin{aligned}
& 2 \times 3 \\
&= 2 \times 2 + 2 \\
&= 2 \times 1 + 2 + 2 \\
&= 2 \times 0 + 2 + 2 + 2 \\
&= 0 + 2 + 2 + 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

どうやらできそうですね。もちろん、他の計算でもできるかどうかを確認しなければいけないのですが、あらゆる計算をすべて調べることはできません。そこで加法のときと同じように、もとの $n \times 1 = n$ の式を復活させよう、と考えます。2 の式の m に 0 を入れると、

$$
\begin{aligned}
n \times 1 &= n \times 0 + n \\
n \times 1 &= 0 + n \\
n \times 1 &= n
\end{aligned}
$$

これで OK ですね。$n \times 1 = n$ が導き出せた、ということは、$n \times 1 = n$ があったときにできていた計算は全てできる、ということでもあります。

ということで、乗法においても、0 を上手く組み込むことができました。

＜除法＞
さて、最後に除法です。除法は乗法の逆演算でしたね。早速具体的にやってみましょう。

$0 \div 3 = ?$

これは、$3 \times ? = 0$ということで、0ですね。それでは、文字を使ってやってみましょう。

【Question10】
$0 \div n =$
$n \div 0 =$
$0 \div 0 =$

$0 \div n$は特に問題ないですね。$0 \div n = ?$であれば、$n \times ? = 0$なので、?は0になります。

問題は下の2つです。たとえば、$n \div 0$は$0 \times ? = n$にならなければいけません。しかし、たとえばnを3としたとき、0に何かをかけて3にしようとしても、そんな数はありません。3ではなく5でも7でも10でも、0に何かをかけて0以外の数にすることはできません。

同じように、$0 \div 0$も考えてみましょう。こちらは$0 \times ? = 0$となります。今度は、ああ?は0だな、と思ったかもしれませんが、よくよく考えてみてください。?は3でも良くないですか？　$0 \times 3 = 0$です。もしくは、5でもいいかもしれません。$0 \times 5 = 0$です。$0 \div 0$を今まで通り考えようとすると、答えはどんな数字でもいいことになってしまいます。

それではどうすればいいのでしょう。

身もふたもない話ですが、この2つの計算、つまり「0で割る計算」については、今のところ数学では扱わないことになっています。その理由は今まで説明したとおり、現状の数学における「四則演算への理解」では、「0で割る計算」を上手く決めることができないからです。しかしだからといって、「0で割る計算」が“できない”のかというと、それはどうかはわかりません。数学が進歩し、数の世界が拡張されたり、四則演算への理解が再構築されれば、「0で割る」という考え方も上手く含んだ演算規則が定義されるかもしれません。そのときにはもしかすると、私たちが「昔の人は、2-3

はできない、って言っていたんだよ」と言っているようなのと同じ感覚で、「昔の人は、0で割る計算は考えても無駄だ、とか言っていたんだよ」とか言ってるかもしれません。

とはいえ一方で、「答えが負になる計算」と違い、「0で割る計算」というのは、その計算をする必要性も今のところ見当たらないので、もしそういう進歩があるとしても、それは随分と先かもしれませんし、場合によってはそういう方向にはいかないかもしれません。

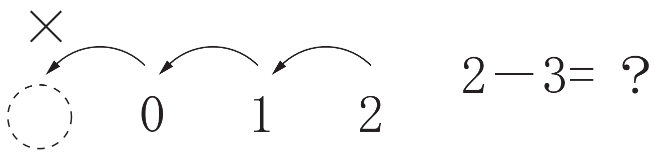
＜まとめ＞

・　ゼロを自然数に加えても、「数」全体の構造は変わらない
・　四則演算についても、自然数のときに提示した演算規則をほぼそのまま流用できる
・　加法、乗法については、自然数のそれらと意味を変えずに拡張することが可能
・　ただし、除法のなかで「0で割る」計算については、上手く定義ができないため、現状の数学においては扱わないことになっている

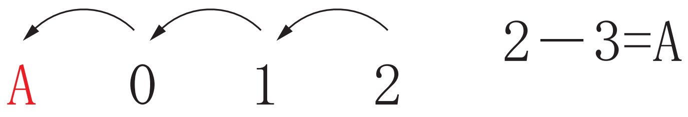
1.1.3　負数への拡張

さて、これまで自然数と0という数を見てきたわけですが、ここまでの数だけではできない計算がいくつかありました。そのうちのひとつ、まずは「小さい数から大き数を引く」という計算について考えていきましょう。

そもそも引き算とはどういう計算だったか、というと、「たし算の逆」でした。それではたし算はどういうものか、というと、これは今のところ（自然数・0の中では）「決まった数だけ次に進む」というイメージでした。ということは、その逆である引き算は、「決まった数だけ前に戻る」と考えることができます。小さい数から大きい数を引くことができない、というのは、「前に戻ろう」としたとき、0よりも前に数がないからですね。

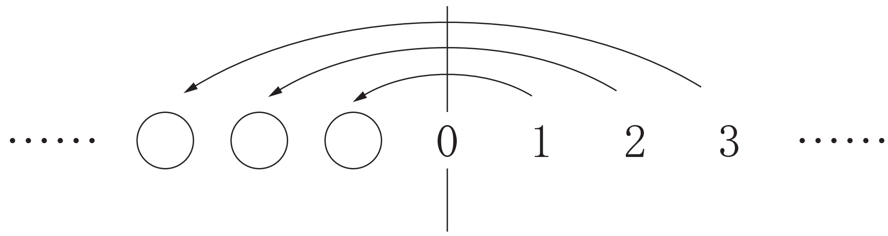


それでは、引き算ができるようにするためにはどうすればいいか、というと、単純な話としては、0よりも前に数字を作る、という手段です。0の一つ前に「A」という数を作りました。



これで例えば、「$2-3$」という計算はできるようになりました。しかし、「$2-4$」とかはできません。それではさらにもうひとつ前に数を作りますか。そうすると「$2-4$」はできても「$2-5$」はできません。それではさらにもう一つ前……とやっていくと、いつまでたってもイタチごっこですね。小さい数から大きい数を引く計算、というのをできるようにしようと思うと、0 より前に無限に戻っていく数の構造が必要になってきます。

さてここで、思い出してください。「無限に 1 つ 1 つ続いていく構造」って今まで出てきませんでしたか。そうです。自然数です。自然数と同じ構造のものを、0 を挟んだ反対側に付け足してあげればいい、と。



イメージでいうと、「鏡」です。0 のところに鏡を置いたところを想像してください。その「鏡」に当たる数式が、次の式です。

$x+n=0$ となる x を $-n$ とする。

文字だけで理解しようとすると難しいので、具体的に数字をいれて考えてみましょう。繰り返しになるかもしれませんが、これは数学を勉強する上でのお約束です。

たとえば、「-3」という数の意味を考えてみましょう。-3 がどういう数かというのを、上の式に当てはめて考えようとすると、n が 3 のときを考えると、「～～となる x を -3 とする」という文章になりそうです。前半の n にも 3 を入れてみると、「$x+3=0$ となる x を -3 とする」となります。つまり、「3 を足すと 0 になる数が -3 である」ということですね。何かよくわからない数がある、でもこれに 3 を足すとちょうど 0 になった。そのときに、このもとの数は「-3」だったんだ、ということにしよう、と。そうすると、1 をたして 0 になる数が -1、2 をたして 0 になる数が -2、……というふうに、すべての自然数 n に対して $-n$ が決まっていきます。（ちなみに、$-0=0$ ですね。上記の式にあてはめて確認してみてください。）

$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

これで負の数を上手くつくり上げることができました。

＜加法＞

それでは負の数を含む四則演算についても順に見て行きましょう。最初は加法からです。今まで見てきた計算方法の延長で考えることができるのか、それとも、新しく定義する必要があるのか。早速やっていきましょう。しつこいようですが、今の段階では、負の数の計算は知らない前提です。知っているのは、自然数と 0 の四則演算です。それから、負の数の構造、つまり先ほどの「負の数の定義式」は使ってもかまいません。

たとえば $3+(-5)$ を考えます。これはこのままでは先に進めないので、両辺に 5 をたすことを考えます。（文字や数式の扱いについては、この「数」についての説明が終わったらひと通りやりますが、今のところは、「両辺に同じ操作をしても等号関係が変わらない」というところだけ納得していただければ、と思います。）

$3+(-5)+5=?+5$

こうすると、左辺の $(-5)+5$ のところは 0 になります。なぜなら、「-5」の定義が「5 を足すと 0 になる数」だったからです。そうすると、こうなります。

$3=?+5$

次に、両辺から 3 を引いてみましょう。

$3-3=?+5-3$

$0=?+2$

そうすると、?は「2 を足すと 0 になる数」つまり $?=-2$ とわかります。これを一般化していきましょう。

【Question11】　加法（m, n は自然数もしくは 0 とします。）

$m+(-n)=$

$(-m)+n=$
$(-m)+(-n)=$

【解説】

・　$m+(-n)=$
→　$m+(-n)=?$
　$m+(-n)+n=?+n$　（両辺にnをたす）
　$m=?+n$

ここから先は、mとnの大きさによって2つの場合に分かれます。mがnと同じ、もしくはmのほうが大きい場合、この式は自然数や0のときにやった、減法の式になります。つまり、$?=m-n$です。しかし、mよりもnが大きい場合、$?=m-n$としてしまうと、そこから先にすすめなってしまいます。そこで、次のように変形してみましょう。

　$m-m=?+n-m$　（両辺からmを引く）
　$0=?+n-m$

このとき、$(n-m)$を1つの数としてみてあげると（このとき、mよりnのほうが大きいので、$(n-m)$は何らかの自然数になっているはずです）、?は$(n-m)$をたすと0になる数、ということで、$-(n-m)$である、と考えることができます。

・　$(-m)+n=$
→　$(-m)+n=?$
　$(-m)+m+n=?+m$　（両辺にnをたす）
　$n=?+m$
　　　　（nがmと同じ、またはmより大きいとき、$?=n-m$）
　$n-n=?+m-n$　（両辺からnを引く）
　$0=?+m-n$
　$?=-(m-n)$　（?は$(m-n)$をたすと0になる数）

・　$(-m)+(-n)=$
→　$(-m)+(-n)=?$

$(-m)+m+(-n)=?+m$　（両辺にmをたす）
$(-n)=?+m$　（$-m+m$ は0）
$(-n)+n=?+m+n$　（両辺に n をたす）
$0=?+m+n$　（$-n+n$ は0）
$?=-(m+n)$　（?は（$m+n$）をたすと0になる数）

技術的な話ではありますが、こういった「未知の計算」を拡張していくとき、「定義の式」を要所要所でつくりだしてあげることが大事です。また、文字を扱うとき、場合分けの必要がある場面もありますので注意してください。

＜減法＞
次は減法です。たとえば、$3-(-5)$ を考えてみましょう。減法は、何をたせばその数になるのか、を考えるのでした。つまり、この場合だと、「-5 に何を足せば3になるか」を考えます。

$3-(-5)=?$
$-5+?=3$

これは順に数えていってもかまいませんが、両辺に5をたす、という発想をここでも使って、

$-5+5+?=3+5$
$?=8$

となります。それでは一般化です。

【Question12】　減法（m,n は自然数または0とします。）
$m-(-n)=$
$-m-n=$
$-m-(-n)=$

【解説】
・$m-(-n)=$

→　「$-n$ に何をたせば m になるか」と考えます。
$-n+?=m$　これの両辺に m をたして
$-n+n+?=m+n$　つまり、$?=m+n$
$(-n)$ を引く、というのは、結果的に「n を足す」と同じになった、というところに注目してください。

・　$-m-n=$
→　「$-n$ に何をたせば $-m$ になるか」、つまり、$n+?=-m$　です。
今度は両辺に m をたすと、$n+m+?=-m+m$　つまり、$n+m+?=0$ です。つまり、?は $(m+n)$ をたすと 0 になる数、つまり、$-(m+n)$ です。

・　$-m-(-n)=$
→　「$-n$ に何をたせば $-m$ になるか」、つまり、$-n+?=-m$　です。
これは $-n+n+?=-m+n$　つまり、$?=-m+n$ ですが、これは先ほどの加法のときにやりました。（n が m と同じ、または m より大きいとき、$?=n-m$、n が m より小さいとき、$?=-(m-n)$）

余談ではありますが、自然数同士の減法、$n-m$ において、m が n より大きいとき、これの答えは $-(m-n)$ になりますね。これも確認しておいてください。

＜乗法＞

次に乗法です。たとえば、$3\times(-5)$ を考えてみましょう。

$3\times(-5)=x$ とします。今までの?と意味は変わりませんが、せっかく数学の講座ですのでそろそろ x を使っていきましょう。この式の両辺に今回は 3×5 をたしてみましょう。

$3\times(-5)+3\times5=x+3\times5$

そうすると、分配法則をつかって

$3\times(-5+5)=x+15$

$-5+5$は0なので、

$0 = x + 15$

こうなります。xは15を足すと0になる数、ということなので、-15ですね。

他にもいくつか考え方があります。1つ目は、乗法の定義通りに計算を運用する方法です。もう一度$3 \times (-5)$です。0のからむ乗法のときにもやりましたが、$n \times m' = n \times m + n$ということは、$n \times m' - n = n \times m$でした。つまり、

$3 \times (-5)$
$= 3 \times (-4) - 3$
$= 3 \times (-3) - 3 - 3$
$= 3 \times (-2) - 3 - 3 - 3$
$= 3 \times (-1) - 3 - 3 - 3 - 3$
$= 3 \times 0 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$
$= 0 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$
$= -15$

となります。
もう一つは、乗法は交換法則がなりたつので、$3 \times (-5) = (-5) \times 3$と考えて、

$(-5) \times 3$
$= (-5) \times 2 + (-5)$
$= (-5) \times 1 + (-5) + (-5)$
$= (-5) \times 0 + (-5) + (-5) + (-5)$
$= 0 + (-5) + (-5) + (-5)$
$= 15$

です。いずれにせよ、負の数が絡んでも乗法は計算できそうです。

【Question13】　乗法（m, n は自然数または0とします。）

$m\times\ (-n) =$

$(-m)\times\ n =$

$(-m)\times\ (-n) =$

【解説】

・　$m\times\ (-n) =$

→　上の例ででてきたどの考え方でもかまいませんが、少しテクニックを必要とした１番最初の方法を確認しておきましょう。

$m\times\ (-n) = x$

$m\times\ (-n) + m\times n = x + m\times n$

$m\times(-n+n) = x + m\times n$

$m\times 0 = x + m\times n$

$0 = x + m\times n$

$x = -(m\times n)$

・　$(-m)\times\ n =$

→　交換法則が成り立つ、ということもあるので省略しますが、$(-m)\times\ n = -(m\times n)$ ですね。基本的には先ほどと同じです。

・　$(-m)\times\ (-n) =$

→　こちらも同じように式変形で考えてみましょう。

$(-m)\times\ (-n) = x$

$(-m)\times(-n) + (-m)\times n = x + (-m)\times n$

$(-m)\times(-n+n) = x + (-m)\times n$

$(-m)\times 0 = x + (-m)\times n$

$0 = x + (-m)\times n$

$0 + m\times n = x + (-m)\times n + m\times n$

$m\times n = x + (-m+m)\times n$

$m\times n = x + 0\times n$

$m\times n = x$

　もしくは、乗法の定義式を利用して、

$(-m)\times(-n)$
$=(-m)\times(-n)'+(-m)$
$=(-m)\times(-n)''-(-m)-(-m)$
$\cdots\cdots$
$=(-m)\times 0-(-m)-(-m)\cdots\cdots-(-m)$　　（$(-m)$ の数は n 個）
$=0-(-m)-(-m)\cdots\cdots-(-m)$　　（$(-m)$ の数は n 個）
$=m\times n$
と考えることもできます。

この計算は、中学数学で必ず引っかかる人の出てくる、「マイナス×マイナスがプラスになる」という計算ですね。

自然数同士の計算、というのは、具体的にイメージしやすいので、理解するのはそれほど難しくないように見えます。しかし、その「具体的なイメージ」に頼って理解しよう、というのは、少し危険なことでもあります。たとえば乗法に関して言えば、自然数の中では結局は「何回足すか」ということなんだろう、と理解しても、それほど大きく間違いではありません。それでは、ここに 0 が入ってきた場合、「0 回たす」というのはどういうことでしょうか。強引に解釈するのであれば、「0 回たす」のは「たさない」ということだ、というのでもいいでしょう。それで納得できるなら構いません。それでは「-3 回たす」というのはどうでしょう。「あれ？」となってくるのではありませんか。

具体的なイメージに頼って理解することは、運良くそれなりに納得できる解釈を得ることができれば先に進むことができますが、運が悪いと逆にドツボにハマってしまいます。とはいえ、この「数の概念を拡張しても通用するイメージ」を獲得する、というのが、ある意味では「数学」という行為なのかもしれません。そうしてどんどん抽象化されていった結果が、先に提示したそれぞれの計算を表す定義であり、数式でもあるのです。

＜除法＞

最後に除法です。まだ有理数を定義していないので、割り切れない計算については「考えなくていい」ということにしておいくてださい。もちろん、0 で割る計算も無視して構いません。

【Question14+解説】　除法 (m, n は自然数とします。)
$m \div (-n) = -(m \div n)$
$(-m) \div n = -(m \div n)$
$(-m) \div (-n) = m \div n$

※　有理数を定義しないと表現しづらいので、ここは結果だけを提示するにとどめておきます。

これで負の数が絡む四則演算について、ひと通り計算できるようになりました。これで無事、負の数も「数」の概念へと仲間入りです。ちなみに、ここまで、つまり、自然数・ゼロ・負の数を全て含めて「整数」といいます

＜単位元と逆元＞

負の数についてのまとめに入る前に、最後にもう一つ、大事な概念をお話ししておきます。それは「単位元」と「逆元」についてです。
単位元、というのは、ある計算について、「結果が変わらないもの」のことです。たとえば、加法についての単位元はなにか、と考えるというのは、「たしても元の数と結果が変わらないものは何か」ということです。つまり、

$m + ? = m$

要は、この？は何でしょう、という話です。これは当然 0 ですね。m の値に関係なく、?の部分、つまり「加法に関する単位元」は 0 です。

この単位元というのは、演算方法それぞれについて存在します。0 は加法についての単位元でしたが、それでは、乗法についての単位元はなんでしょう。同じように「かけても元の数と結果が変わらない数」です。

$m \times ? = m$

今度は 1 ですね。今回も、m の値に関係なく、?の部分、つまり「乗法に関する単位元」は 1 です。

それでは次に、逆元です。逆元とは何か、と言いますと、「演算の効果を打ち消すもの」のことです。たとえば、なにかに3を足します。これをもとの数に戻したいとき、何を足せばいいか、を考えるのです。何をすればいいか、と考えると、「3を引く」ということになるのですが、あくまで何を“たせば”いいか、です。

$\Box + 3 + ? = \Box$　この?ですね。

これは、$3 + ? = 0$ と考えると、-3 とわかります。今回は、足す数によって、打ち消すときにたさなければいけない数も変わりますね。+5を打ち消すには(-5)を足さなければいけませんし、+(-12)を打ち消す場合には12を足さなければいけません。この場合、「加法に関するnの逆元は$-n$」というふうに表現します。もちろん、「乗法に関する3の逆元」となってくるとまた別の値になってきます（これについては有理数の導入をお待ちください)。ちなみに、もとの数と逆元を足すと単位元になる、という特徴もあります。$3 + (-3) = 0$ですね。

さて、なぜここでこの「単位元」と「逆元」という新しい概念を導入したか、というと、

$x - y$

これにもう一度注目してください。

減法、というのは、直接定義されたわけではなく、加法の逆演算として定義されました。しかし、数学というのは、似たようなものを、できれば「同じもの」、「一緒の概念」として扱いたいのです。そこで、こう書き換えてみましょう。

$x - y = x + (-y)$

xからyをひく、というのは、xに$-y$を足す、つまりyの逆元を足す、というのと同じだ、ということになりました。つまり、引き算は新しく演算そのものを定義するのではなく、逆元を足す、ことだ、と言い換えることもできるのです。そうすると、減法と加法はひとつの概念としてまとめるこ

とができます。（ちなみに、単位元や逆元の概念は、普通減法や除法では考えません。なぜなら、それぞれ加法や乗法の単位元・逆元を考えることで、加法や乗法と同じ枠組みに収めてしまうことができるからです。）

＜まとめ＞

・　負の数は、以下のように定義される

「$x+n=0$となるxを$-n$とする（nは自然数）」

・　負の数を含む四則演算は、自然数・0に関する四則演算に、負の数の定義式を付け加えれば、それらから計算することができる。

・　負の数を導入することで、整数の減法は、逆元を用いた加法に書き換えることができる