おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第3回授業内容＞

---

§1　数学的基盤の整備

1.1　数の世界の拡がり

1.1.5　有理数

前回、負の数を導入したことで、自然数だけでは完全にできなかった計算のうち、引き算のところをカバーすることができました。しかしまだ自然数だけではできない計算は他にもありましたね。そうです、割り算です。たとえば、$3 \div 5$ みたいな計算ですね。自然数の中だけでは、5にかけると3になる数というのは存在しませんでした。負の数まで拡げても、まだ存在しません。そこで、さらに数の世界を拡張して、「有理数」というものを考えていきます。

有理数というと聞きなれない感じがしますが、端的に言うと分数のことです。しかし単純に「分数」とだけ言ってしまうと少し不正確です。なぜなら、分数というのは表記の方法であって、本質的にはどういう数か、ということを伝えていないからです。ですので、「分数で表すことのできる数」というふうに表現しておきましょう。そういう意味では、今まで扱ってきた「整数」も「有理数」に含まれます（たとえば、$4 = \frac{4}{1}$）。

しかし、「分数」といっても、$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$のような分数は、有理数ではありません。「有理数」という場合、分数は分数でも、「分母が正の整数、分子が整数である分数」で表現できなければいけません。別の言い方をすると、「整数pと正の整数qを用いて、$\frac{p}{q}$と表すことができる数」が有理数、ということになります。

ここで「なぜqは正の整数でないといけないか」という疑問が出てくるかもしれません。実は、別に正の整数でなければいけない、ということはありません。（場合によっては$b \neq 0$とだけ書かれていることもあります。分母が0ではさすがにダメです）。　しかし、分母と分子が共に整数であれば、「分母が正の整数であり、分子が整数である分数」に必ず書き換えることができます。たとえば、$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ですし、$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$となります（この部分、なぜそうなるかは、あとでやります）。

ちなみに、$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$は有理数ではない、と言いましたが、$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$は有理数です（値としては「2」という値ですので）。大変ややこしいですね。つまり、有理数かどうか、というのは、「見た目がどういう形か」ということで判断してはいけない、ということです。とはいえ、これは有理数に限った話ではありません。同じ数でもいろんな表現の仕方がある、という話は以前にもしました。9という数を$4+5$と表現しても、間違いではないのです。そういう意味では「$2.5+1.5$」という数が整数かどうか、と聞かれると、これは整数ですね。数の特徴を考えるときは、「どういう形をしているか」でとらえるのではなく、「どういう数を表しているか」を考えることが大事です。

だからあくまで「有理数」の定義は、「分母・分子が整数になる分数で“表すことのできる”数」なのです。

分数というと、みなさんは小学校で習ったとは思うのですが、このあたりから脱落していく子が増えていくところでもあります。みなさんは大丈夫でしたでしょうか。なぜ脱落していく子が多いか、というと、小学校の段階では、この分数の本質がわかりづらいからです。小学校で分数を習うとき、たとえば「リンゴ1個を3つに分けたとき、そのひとつひとつを$\frac{1}{3}$と表すよ」というふうに教わったと思います。もちろん、そういった「等分」というイメージも分数のイメージとして間違っているわけではありませんが、その「等分」というイメージだけでは、分数の本質をつかみきれていません。

それでは、分数の本質、とは何なのでしょうか。分数というのは、割り算

の答えとして期待されている、という話をしました。つまり、分数の本質というのは、割り算のイメージでもあります。割り算とはどういうものだったか、もう一度思い出してください。そうです、掛け算の逆です。つまり、「何倍か」というのを考える、という話でした。

何倍かを考える、ということでしたら、小学校でもう一つ習った概念があります。「比」です。

つまり、実は分数というのは、「比」を表しているのです。有理数は英語で“rational number”です。この“rational”には「理性的な」という意味もありますが、ここでの意味はそうではありません。ここで使われている“ratio”というのは、もともと比という意味で、つまり「有理数」の「理」は「比」という意味です。有理数は「整数同士の比の値として表される数」ということもできます。（たとえば、$\frac{2}{5}$は$2:5$という比の値を表しています。）

さて、分数というのは割り切れない割り算の答えとして期待されている、という話でしたが、小学校の算数ではもうひとつ、割り切れない割り算の答えを表現するときに使うものがありましたね。そうです、小数です。それでは小数は、「有理数」とはどういう関係があるのでしょうか。

結論から言うと、小数の中には有理数のものもあるし、有理数でないものもあります。やはりここでも注意していただきたいのは、「小数」というのはあくまでも表記の方法だ、というところです。それによって表記される「数」のなかには、有理数のものもあれば有理数でないものもあります。とはいえ、小数表記になおしたとき、有理数とそうでないものの間には、見た目の特徴に大きな違いがあります。そこで、ここから少し、小数で表記した場合に「有理数」とそうでないものにそれぞれどういう特徴がでるか、というお話をしておきたいと思います。

まず、数を小数表記に直したとき、0.5のように途中で終わる小数と、0.33333……のように、途中で終わらず無限に続いていく小数とに分かれます。前者を有限小数、後者を無限小数といいますが、まずこのうちの有限小数のほうは、すべて「有理数」です。有理数かどうか、というのは、分数で表せるかどうか、ということですので、つまり、途中で終わる「有限小数」は、必ず分数で表せる、ということでもあります。

たとえば先ほど挙げた0.5は$\frac{1}{2}$ですね。しかしこう捉えてしまうと他の数の議論がしづらくなってくるので、ここは$\frac{5}{10}$にできるよね、ということに

しておきましょう。0.32 の場合は $\frac{32}{100}$ ですし、0.028 の場合は $\frac{28}{1000}$ です。このように、途中で終わる小数の場合は、終わるまでの桁数分の分母を用意して、その上に分子をそのまま乗せると、簡単に分数で表記することができます（もちろん、作れるかどうか、ということが大事なので、そのあと約分ができるかどうか、というのはここではあまり考えなくても大丈夫です。）

それでは無限小数のほうはすべて有理数ではないのか、というと、そういうわけでもありません。無限小数の中でも、見た目の特徴によってまた2つのグループに分けることができます。片方は、0.151515……のような、“繰り返し”が現れる小数、もう片方は、そういう繰り返しが現れない小数です。繰り返しが現れる小数を「循環小数」、繰り返しにならない小数を「非循環小数」といいますが、このうちの「循環小数」になる数も、やはり有理数なのです。（ちなみに、0.33333……、のように同じ数ばっかりの場合（これは1桁の繰り返し、と捉えます）も循環小数ですし、0.1234545454545……、というふうに、途中から繰り返しが始まるものも循環小数です。）

たとえば、先程から何回か出てきている 0.33333……は $\frac{1}{3}$ です。他にも、たとえば 0.142857142857……という循環小数は $\frac{1}{7}$ ですし、0.0111111……は $\frac{1}{90}$ となります。ほかの循環小数も全部分数で表わされるか、という話は、ここでは触れませんが、できるんだ、ということでひとまずは納得していただけるとありがたいです。（これについては、本講座の後半、極限とか級数とかのところでやる予定です。）

それで結局、有理数ではないものはなんなんだ、という話ですが、無限小数のうち循環しないもの、つまり「非循環小数」が、有理数ではない数（無理数）になります。

有限小数
無限小数 ― 循環小数 } 有理数
　　　　 ― 非循環小数 → 有理数ではない

ちなみに、有限小数は循環小数でも表記できるのですが（たとえば、よく話題にのぼりますが「1=0.99999……」といった感じです）、そうすると

つまり、「循環小数で表わされるものが有理数」と言ってしまうこともできます。この、有限小数を循環小数でどうあらわすか、という話については、これもやはり極限などのあたりで扱います。

ここで一度軽くまとめておきましょう

＜まとめ＞（有理数とは）
・　整数だけでは、一部の割り算の答えが出ない。そこで、「有理数」という数を導入することを考える。
・　有理数とは、整数同士の比の値として表すことができる数のことである。
・　有理数には、整数も含まれる。
・　有理数を小数表記に直すと、有限小数になるか循環小数になる。
・　また逆に、有限小数か循環小数で表記できるものは有理数である。

＜有理数の演算＞
ではここからは有理数の演算です。
最初に「有理数」を数式で定義しておきましょう。

$p \div q = \frac{p}{q}$

pをqで割った答えが$\frac{p}{q}$ということです。具体的な例を挙げてみると、$3 \div 5 = \frac{3}{5}$です。逆に、$\frac{3}{5}$という値を見たら$3 \div 5$の答えなんだなと思うことも大事です。そして、上記の式から$\frac{p}{q}$がきまる、つまり「pはqの何倍か」の答えが$\frac{p}{q}$、ということは、qを$\frac{p}{q}$倍するとpになりますね（$q \times \frac{p}{q} = p$）。

さて、それでは四則演算にはいります……と言う前に、もうひとつだけ、大事なことを確認しておきましょう。「約分」についてです。約分がわからない！という人は流石にいないと思いますが、約分というものを数学的に捉えるとどうなるか、というのをここで確認しておきましょう。つまり、本当に「約分」する前とあとで同じ数なのか、ということを確認します。たとえば具体的に、$\frac{3}{5}$と$\frac{6}{10}$で考えてみましょう。

$\frac{3}{5} = k$とすると、$3 \div 5 = k$なので$k \times 5 = 3$
同様に、$\frac{6}{10} = l$とすると、$6 \div 10 = l$なので$l \times 10 = 6$
これの両辺を2で割ると、　$l \times 5 = 3$
ということは、$k \times 5 = l \times 5$となり、$k = l$

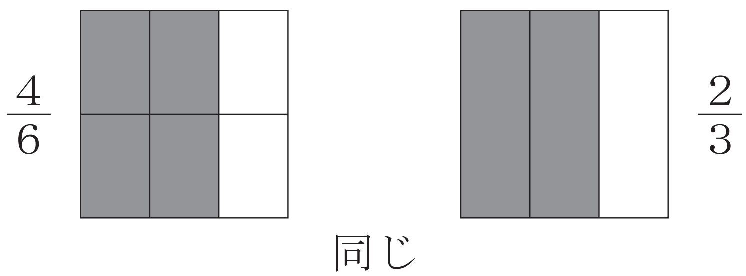
これでオッケーです。では、一般化してみましょう。

【Question16】
$\frac{m \times a}{m \times b} = \frac{a}{b}$となることを証明してください。

【解説】
数学の勉強をするとき、文字に数字を代入する、という場面はたくさんあったと思います。もちろん、それはそれで重要ではありますが、逆に具体的な数字を文字に置き換えていく、つまり抽象化していく、というのも非常に大事です。今回の問題でも、いきなり文字で考える必要はありません。具体的な数のときにどういう手順をふんだか、というのを一つ一つ思い出してみてください。
先ほどの、3がa、5がb、6や10はそれぞれ2×3、2×5となるので、2がmにあたります。

$\frac{a}{b} = k$とすると、$a \div b = k$なので$k \times b = a$
同様に、$\frac{m \times a}{m \times b} = l$とすると、$(m \times a) \div (m \times b) = l$なので$l \times (m \times b) = (m \times a)$
これの両辺をmで割ると、　$l \times b = a$
ということは、$k \times b = l \times b$となり、$k = l$

小学校では「分数は約分しても値が変わりません」と言って、こういう図を見せられたと思います。



この図でも確かに、$\frac{4}{6}$と$\frac{2}{3}$は同じなんだな、と納得できるかもしれません

。しかしそれでは、$\frac{1}{10000}$と$\frac{2}{20000}$は本当に一緒なのでしょうか。もちろん、これも図をかけば納得できるかもしれません。他の分数はどうでしょう。本当にすべての分数は約分しても値が変わらないのでしょうか。もしかすると、約分すると値が変わる分数とかもあるかもしれない、と思いませんか。ひとつひとつの例は、それこそ図を描いていけば納得できるのかもしれませんが、無限に存在する分数のすべてについて、図を描いて調べていくことはできません。そこで数学では、文字を使って「証明」するのです。この辺りの話については、数学的基盤の後半部分「数と式」のところでもまた触れます。

ちなみに、$\frac{m\times a}{m\times b}$が$\frac{a}{b}$と等しい、ということは、$\frac{a}{b}$が$\frac{m\times a}{m\times b}$と等しい、ということでもあります。こちらは「約分」に対して「倍分」といいますが、分数の分母と分子に同じ数をかけても値は変わらない、ということです。これを使うと、先ほど出てきた$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$と$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$は、$\frac{a}{-b}=\frac{a\times -1}{-b\times -1}=\frac{-a}{b}$と$\frac{-a}{-b}=\frac{-a\times -1}{-b\times -1}=\frac{a}{b}$と考えることができます。

さて、それではようやく四則演算に入っていきましょう。まずは加法からです。

分数のたし算は通分して足せばいい、というふうに習ったと思います。これも、本当にそうなるのか、という確認をしていきましょう。たとえば、$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=?$を考えます。

今のところ、整数同士であれば四則演算がすべてできるのでした。そこで、このもとの式を整数だけにすることを考えます。そこで、分数の部分をどういうふうに整数にすればいいかな、と考えると、$p\div q=\frac{p}{q}$という式があったのでした。

$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=?$
この式の左右にまず5をかけてみましょう。
$\frac{2}{5}\times 5+\frac{3}{7}\times 5=?\times 5$
こうすると、$\frac{2}{5}\times 5$の部分が2になりますね。同じように、$\frac{3}{7}$も整数にすることを考えましょう。次は7をかけてみます。
$2\times 7+\frac{3}{7}\times 7\times 5=?\times 5\times 7$
もちろん、$\frac{3}{7}\times 7$の部分は3になります。つまり、

$\underline{2 \times 7 + 3 \times 5} = ? \times \underline{5 \times 7}$

ここでそれぞれ下線部を一塊の「数」であると見てあげると、$m = ? \times n$ の形になっています。ということは、$? = m \div n$、つまり、$? = \frac{m}{n}$ となります。

$? = \frac{2\times7+3\times5}{5\times7}$

一方で、通分して計算するとすると、

$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2\times7}{5\times7} + \frac{3\times5}{7\times5} = \frac{2\times7+3\times5}{5\times7}$

となるので、先ほどの結果と一致します。

もちろん、この結果は計算してしまうと $\frac{29}{35}$ ですが、敢えて計算せずに残してあるのは、一般化するときに見やすくするためです。

【Question17】　加法

$\frac{a}{b} + n =$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$

【解説】

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ からまずは見てみましょう。具体的な数値では先ほどやったので、それを文字に置き換えていきます。

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ?$

この式の左右にまず b をかけてみましょう。

$\frac{a}{b} \times b + \frac{c}{d} \times b = ? \times b$

こうすると、$\frac{a}{b} \times b$ の部分が a になりますね。同じように、$\frac{c}{d}$ も整数にすることを考えましょう。次は d をかけてみます。

$a \times d + \frac{c}{d} \times d \times b = ? \times b \times d$

もちろん、$\frac{c}{d} \times d$ の部分は c になります。つまり、

$\underline{a \times d + c \times b} = ? \times \underline{b \times d}$

ここでそれぞれ下線部を一塊の「数」であると見てあげると、$m = ? \times n$ の形になっています。ということは、$? = m \div n$、つまり、$? = \frac{m}{n}$ となります。

$? = \frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$

数字部分以外は先ほどと全く一緒なのがわかりますか。繰り返しになりますが、文字を扱うのが苦手、という人は、こういうふうにまずは具体的な数値で考えたあと、文字に置き換えていくとわかりやすいです。そのと

きは、計算できる数でもそのまま計算せずに置いておくと、より「変形の手順」が見やすくなります。

$\frac{a}{b}+n=?$ のほうも変形の手順としてはほとんど変わりませんが、片方が整数である分、両辺を何倍かするのは2回ではなく1回だけになり、先ほどの式よりも簡単にできるはずです。

しかしそもそも、この「片方が整数」の計算は、「両方とも分数」という計算と別々のものなのでしょうか。有理数の話の最初に、整数も有理数だ、分数で表せるんだ、という話をしました。つまり、n という整数は、$\frac{n}{1}$ という分数で表記することができます。そうすると、$\frac{a}{b}+n$ という計算は、$\frac{a}{b}+\frac{n}{1}$ となり、$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ という計算のバリエーションだと捉えることもできるでしょう。

ついでではありますが、分母同士が同じ分数のたし算もここで少し考えてみましょう。分母同士が同じであれば、通分する必要がありません。$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ ですね。これは先ほどの計算とは別物なのでしょうか。例えば、$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ を先ほどの計算の中にいれて計算してみましょう。

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5+2\times5}{5\times5}=\frac{5+10}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

正しく計算出来ました。つまり、分母同士が同じときのたし算も、同じ枠組みの中で扱うことができます。つまり、有理数の加法はすべて $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ と考えればいい、ということですね。

つぎに減法ですが、これはほとんど加法と同じです。いきなり一般的なパターンから見ても大丈夫でしょうか。

【Question18】　減法

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=$

【解説】

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=?$

$\frac{a}{b}\times b\times d-\frac{c}{d}\times b\times d=?\times b\times d$

$(a\times d-c\times b)=?\times(b\times d)$

$?=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$

※　途中、() でくくったのは、“ここを一塊の数として見ますよ”という

強調のためです。計算上の影響はありません。

わかりにくいところがあれば、まずは具体的な値をいれて考えてみましょう。やっていることは加法のときと同様、まず分数を整数にするために、式全体を何倍かする、というところからです。

次は乗法です。これも一般的なパターンから行きます。加法や減法よりも少し単純です。

【Question19】　乗法
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =$

【解説】
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =?$
$\frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d =? \times b \times d$
$(a \times c) =? \times (b \times d)$
$? = \frac{a \times c}{b \times d}$

それでは最後に除法です。小学校の算数で「ひっくり返して割る」と習うところですね。本当にそうなるのか、ここは少し丁寧に、具体的な値から見て行きましょう。$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7}$ を考えてみます。

$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} =?$
この式は、$\frac{2}{5}$が$\frac{3}{7}$の何倍かを考える、つまり、$\frac{2}{5}$が$\frac{3}{7}$の?倍である、ということなので、
$\frac{2}{5} =? \times \frac{3}{7}$
こう変形することができます。ここから先は今までと同様、分数を整数にすることを考えます。まずは全体に 5 をかけてみます。
$\frac{2}{5} \times 5 =? \times \frac{3}{7} \times 5$
$\frac{2}{5} \times 5$ の部分は 2 ですね。次に 7 を全体にかけてみます。
$2 \times 7 =? \times \frac{3}{7} \times 7 \times 5$
$\frac{3}{7} \times 7$ の部分が 3 になります。つまり、
$(2 \times 7) =? \times (5 \times 3)$
となるので、

　$? = \frac{2\times7}{5\times3}$
となります。これは、
　$\frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{2\times7}{5\times3}$
の結果と同じ、つまり、結果として「ひっくり返してかけている」ことになりますね。

【Question20】　除法
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$

【解説】
　文字で考えるときも、やることは変わりません。

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = ?$$
$$\frac{a}{b} = ? \times \frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b} \times b \times d = ? \times \frac{c}{d} \times b \times d$$
$$(a \times d) = ? \times (b \times c)$$
$$? = \frac{a\times d}{b\times c}$$

　やはりこれも、$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\times d}{b\times c}$ と結果が同じになっています。

　分数のわり算は、小学校の算数の中でも、つまずく人の多いテーマでもあります。手順としては、「ひっくり返してかければいい」という単純なものですので、この手順そのものを理解できない、という人は少ないはずです。ここでつまずく人というのは、何をやればいいのかわからない、のではなく、なぜそうすればいいのかわからない、本当にそれでいいのか不安、ということなのでしょう。
　しかし、それに対する答えは上記の計算であり、結局は、数学的に式を変形していくと結果としてそうなる、という話になるのですが、この話をそのまましても、おそらく受け入れてもらえる可能性はあまり高くありません。
　やはりここで重要な事は、なぜこれが正しいのか、ということよりも、なぜここでつまずくのか、ということだと思います。
　それでは、そのなぜここでつまずくのか、という話なのですが、その原因の本質は、得体のしれなさ、ではないでしょうか。
　１つ目は、「分数で割る」ということそのものの、得体のしれなさ、です。

これは先ほどお話したように、割り算について「わける」というイメージしか持っていない場合におこります。要するに、$\frac{1}{3}$人で分けるってなんだよ、という話です。割り算に対するイメージが不足しており、計算自体が“得体のしれないもの”に見えるのです。こういったパターンの場合は、割り算についてのイメージを拡げてあげるといいでしょう。割り算には「等しく分ける」というイメージの他にも、「何倍かを考える」というイメージがあるのでした。そうすると例えば、$\frac{1}{3} \div \frac{2}{5}$というのは、$\frac{1}{3}$は$\frac{2}{5}$の何倍でしょう、ということになるので、こういう計算なら現実的にも適応させられるシチュエーションがあるはずです。

もう1つは、「ひっくり返してかける」という手順そのものに対する、得体のしれなさです。ここで得体のしれなさを感じる人は、「ひっくり返した分数」がどこからともなく唐突に出てきたように感じているのだと思います。確かに字面は似ているけど、それってもとの計算と全く別のものだよね、と。しかしもちろん、実際は、もとの分数とひっくり返してできた分数は、全くの無関係というわけではありません。ですので、その関係性を明示するのがいいでしょう。

負の数を考えたとき、単位元と逆元の話をしたのを覚えていますか。負の数のところでは、加法と乗法における単位元の説明と、加法に関する逆元の説明はしました。しかし、乗法に関する逆元の説明はしませんでしたね。それはもちろん、乗法に関する逆元が存在しないから、ではありません。乗法に関する逆元を考えるには、有理数の世界に踏み込む必要があったからです。そこで、有理数まで世界を拡張した今、改めて考えてみましょう。

乗法に関する単位元、つまり「かけても値が変わらない数」というのは、1でした。

$$\square \times ? = \square \quad \rightarrow \quad ? = 1$$

逆元、というのは、かけてしまったものを、もとに戻す数です。たとえば、3をかけてしまったあと、もとに戻したいとき、何をかければいいでしょうか。

$$\square \times 3 \times ? = \square$$

これは、$\frac{1}{3}$になるのがわかりますか。つまり、「乗法についての3の逆元

は $\frac{1}{3}$」ということになります。それでは、$\frac{2}{5}$ の逆元はなんでしょう。

$\square \times \frac{2}{5} \times ? = \square$

これは、$\frac{5}{2}$ ですね。分数の場合、逆元は分母と分子をひっくり返した数、ということになります。分数の割り算をするとき、「ひっくり返してかける」というのは、実は「逆元をかける」ということをやっているのです。これは、引き算を「逆元を足す」と解釈したのと同じですね。

というわけで、最初に自然数を考えるときに提示した計算法則は、有理数まで通用しました。種明かしをしてしまうと、より広い「数」の概念で通用する計算の定義、というものを考えた結果、今まで見てきた数式にたどりついた、という話でもあります。自然数だけでみれば、掛け算は「何回足すか」ということでいいですし、割り算は「分ける」ということでも構いません。しかし、その捉え方では、負の数や分数の計算は“同じように”捉えることができません。そこで、自然数でも分数でも「同じように」捉えられる捉え方を考えた結果、例の数式であれば「同じように」捉えられるね、というところにだとりついたのが数学者達の研究の成果というわけです。ちなみに、なぜこの段階でそういうことを言い出したかというと、この数式が通用するのは有理数までの世界だけで、ここから先は「同じように」は捉えられないからです。

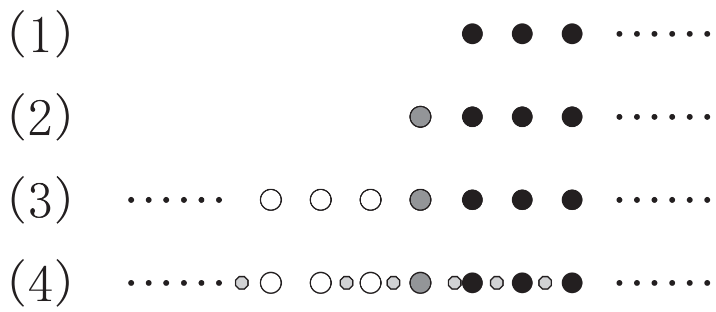
＜まとめ（有理数）＞

・　$p \div q$ の値を $\frac{p}{q}$ と表す。つまり、$q \times \frac{p}{q} = p$ である。
・　自然数、ゼロ、負の数、有理数までの四則演算は、同じ数式で捉えることが出来る。
・　有理数の中で、割り算というのは「逆元をかける」という演算でもある。

1.1.6　無理数

ここまでの数の構造をイメージで捉えてみましょう。まずは、自然数というものが飛び飛びに、しかし無限に続いていきます（1）。これに「0」という新たな起点が加わりました（2）。そして、0 より前に負の数が、自然数を

鏡に写したような状態で続いていきます（3)。さらに、この隙間に、分数が入っていって、「有理数」という数の世界になるのでした（4)。



さて、そうやってできた有理数の世界ですが、この有理数と有理数の間は、実は結構スカスカなんですね。有理数と有理数の間は、有理数で埋めることができません。どういうことかというと、どんなに近い有理数を2つもってきても、それが隣同士とは言えないのです。必ず、間にまだ他の有理数がある、ということになってしまいます。それについては、いくつか数学的に説明することができます。まずひとつめは、$\frac{a}{b}$と$\frac{c}{d}$という2つの有理数があった場合、その2つのちょうど真ん中の数はやはり有理数になるからです。ちょうど真ん中の数は、2つの有理数を平均して、$(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})\div 2=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d\times 2}$となりますが、分母も分子も整数となるので有理数です。大小関係も厳密に計算することはできますが、ここでは省略します。

もうひとつ、この後の流れには余り関係ありませんが、面白い話をしておきましょう。$\frac{a}{b}$と$\frac{c}{d}$という2つの有理数があった場合、分母どうし、分子どうしをそのまま足した分数、つまり$\frac{a+c}{b+d}$も必ずその間に来るのです。（たとえば、$\frac{2}{5}$と$\frac{4}{7}$という2つの有理数があった場合、$\frac{2+4}{5+7}$、つまり$\frac{6}{12}$は必ずそれらの間に来ます。）

【Question21】

$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$であるとき、$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$を証明してください。（ただし、$b,d>0$）

【解説】

$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$をまず考えましょう。分数同士で大小関係をくらべるとき、分母が違うものどうしだと比べにくいですが、分母がそろっていると比べやすくなります。そこで、通分してみましょう。

$\frac{a}{b}=\frac{a\times(b+d)}{b\times(b+d)}$

$\frac{a+c}{b+d}=\frac{(a+c)\times b}{(b+d)\times b}$

となります。分母がそろったので、分子の $a \times (b+d)$ と $(a+c) \times b$ を比べて、大きいほうが大きい、ということになります。そこで、これらをそれぞれ分配法則を使って展開すると、

$a \times (b+d) = a \times b + a \times d$
$(a+c) \times b = a \times b + c \times b$

となります。この2つを見比べると、$a \times b$ は両方に出てきているので、$a \times d$ と $c \times b$ を比較すればいい、ということになります。では、どちらが大きいのでしょうか。ここで、一番最初に与えられていた条件を使いましょう。$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ の数式です。こちらも通分してみると、

$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$
$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$

となり、$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ということは、$a \times d$ より $c \times b$ の方が大きい、ということである、とわかります。ということはつまり、$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ です。$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ のほうも同じように考えることができるでしょう。

（話の筋とは直接関係ないので、難しいと感じた人は、「異なる2つの有理数があったら、その間に簡単に新しい有理数を作ることができるんだなあ」というところだけ理解していただければ、と思います。また、数学的な証明は、上記の考え方を上手く整理して書く必要があります。上記はあくまで考え方の流れ、ということで。）

さて、そういうふうに、有理数と有理数の間は有理数だけでは埋まっていない、ということなのですが、それではその隙間に入ってくる数は一体なんなのか、というと、それが今から見ていく「無理数」です。

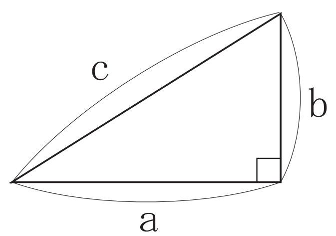
無理数というのは、有理数ではないもの、です。先ほど小数で表現したときに循環小数になるものが有理数で、循環小数にならないものは有理数じゃないよ、と言いましたが、この「循環小数にならないもの」が無理数です。循環小数にならない、ということは、整数の比（分数）で表すことができない、ということでもあります。無理数（irrational number）の「理」は有

理数の「理」の意味と同じく「比」という意味で、つまり無理数というのは「比で表せない数」という意味です。

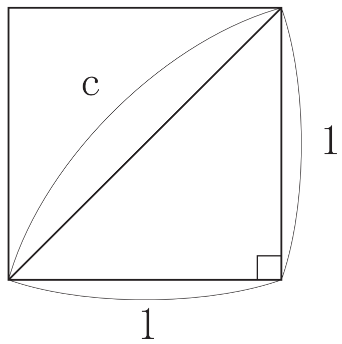
具体的にどういう数かというと、実はこの講座でいくつかは既に出てきていますし、いくつかはみなさんご存知のはずです。また、簡単に作ることもできます。例えば、$\sqrt{2}$。これは1.41421356……と続いていきますが、どこまでいっても循環はしません。また、知っているはず、という意味で言えば、πもそうですね。これも3.1415926585……と。もうひとつ、今まで出てきた中で言うと、実はeもこれは無理数です。値としては、2.718281828459045……です。これは1828の部分が循環しているかと思いきや、実は循環していません。簡単につくることができる無理数、というと、たとえば、0.123456789101112……というような1,2,3,4,……と順に並べていった数がそれにあたります。これはとても規則的には並んでいますが、循環はしていないので無理数です。完全に余談ですがこういう数にも名前はついていて、チャンパーノウン定数とよばれているそうです。

ちなみに、そういった数（無理数）の発見は歴史的にはかなり古いです。ピタゴラスという人の名前はご存知でしょうか。古代ギリシャの人ですが、数学史上ではかなり有名な人です。そのピタゴラスの名前で一番有名なのが「ピタゴラスの定理」です。（日本語では「三平方の定理」とも言います）。

【ピタゴラスの定理】
直角三角形の3辺の長さa、b、cについて、$a^2+b^2=c^2$が常に成立する。



この定理を使って、直角二等辺三角形の斜辺の長さ（つまり正方形の対角線の長さ）を考えてみましょう。1辺の長さを1とします。



そうすると、$1^2+1^2=c^2$となるので、$c^2=2$です。さて、このcの値を考えよう、というと、あれ?ってなるわけですよ。もちろん、このcの値が整数で表せないことはすぐに解りますが、もうしばらく考えていると、どうやら分数でも表すことができないぞ、ということに気づきます。ピタゴラス学派、という、このピタゴラスが作ったみんなで数学の研究ばかりしている秘密組織みたいなのがあったのですが、そこの人たちがこれを見つけてしまったんですね。見つけてしまった、というのは、この組織は(そもそものピタゴラスからして)「数」特に「整数」を崇高なものとして崇めていたのです。そして、すべての物は整数であらわされる、と考えていました。(話はそれますが、数秘術は御存知でしょうか。数字に意味をもたせたりして、誕生日とかで運勢を占ったりするやつです。ああいうものの源流も、このピタゴラス学派にあります。)

そういう人たちにとって、整数で表せない数がある、というのは大きな衝撃でした。それを見つけた弟子を殺してしまった、という伝説もあるくらいです。(まあこれは、事実かどうかは相当怪しいのですが。)

もちろん最初は、有理数として、つまり分数の形で表現できるんじゃないか、ということを数学者は考えました。しかし、これはどうやら無理らしい、ということがそれこそ数学的に証明されてしまいました。これはついでなので、少し一緒に追いかけてみましょう。

【Question22】
$\sqrt{2}$が無理数であることを証明してください。

【解説】
これは高校の数学で必ずでてくる問題です。どの教科書にも必ず載ってますし、どの参考書・問題集でも出てきます。そしてもちろんテストにも出

ます。（$\sqrt{\ }$ の中身が違うことはありますが。）　「証明」の技法としては、「背理法」というものを使います。これも先ほどと同様、ここが理解できなくても先へ進めますので、難しいと感じた場合は、「$\sqrt{2}$ は分数では表せないんだな」というところだけ理解していただければまずはいいかな、と想います。さらに言うと、表せるんじゃないか、ということも、一応数学者は考えてみたんだよ、ということも理解していただけると尚いいです。

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、互いに素な整数 p と q を用いて、$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ と表されるはずです（$q \neq 0$）。互いに素、というのは、同じ数で割れない数の組、ということで、つまりこれ以上約分できない分数 $\frac{p}{q}$ と表すことができるはず、ということです。

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

この式の両辺をそれぞれ 2 乗すると、

$2 = \frac{p \times p}{q \times q}$

これに $(q \times q)$ をかけると、

$2 \times q \times q = p \times p$

左側（$2 \times q \times q$）は明らかに偶数なので、右側（$p \times p$）も偶数になるはず。つまり、p も偶数になるはずです。（p が奇数なら、$p \times p$ も奇数になるはずです。）　そこで、$p = 2 \times a$（a は整数）とすると、先ほどの式は、

$2 \times q \times q = 2 \times a \times 2 \times a$

となるので、これを 2 で割ると、

$q \times q = 2 \times a \times a$

です。先ほどと同じように考えると、q も偶数、ということになります。しかし、$\frac{p}{q}$ は約分できないはずなのでした。ここで「矛盾」が発生します。$\sqrt{2}$ が有理数だと考えると、これ以上約分できない分数、$\frac{p}{q}$ と表すことができるはずだったのですが、$\frac{p}{q}$ は約分できてしまいました。$\sqrt{2}$ は分数で表すことができない、ということは、つまり、有理数ではない、と言うことができます。

証明の方法自体は、他にもいろいろありますが（ピタゴラス学派による証明などもあり、それはこれとは違う方法です。）、どうやら分数で表せない数が存在するぞ、ということで、それが「無理数」ということです。

＜無理数の演算＞

さて、今度はその演算方法を考えていきたいのですが、このあたりから

難しくなってきます。そもそも、この無理数には今までの有理数までのように、数式でひとまとめに捉えられるわけではありません。というよりも、ほとんどの無理数は人にうまく認識されていません。

無理数は分数でも表せませんし、小数で表しても無限に続き、循環もしません。正確に書き表すことはできませんし、「こういう値をもった数」というふうに、数値として正確に説明することもできません。かろうじて、「こういう意味を持つ数」として表現することくらいしかできません。

計算についても同様に扱いづらく、このあたりから、以前お伝えしていた「シンプルに表せない数」が出てくるようになります。$\sqrt{3}+\sqrt{5}$と書かれたとき、これはこれ以上シンプルに表現することができません。ですので、ここから先の「計算」というのは“できる限り”シンプルな形で表現する、という意味で考えていただければ、と思います。

そこの気持ち悪ささえ超えられれば、無理数の計算はある意味ではとても簡単です。基本的には、混ぜるな危険、です。たとえば、$3+e$をしようと思ったら、これはそのまま$3+e$ですし、$5\times e$を計算しようと思ったら、これもそのまま$5\times e$です。後々文字と式の計算のところでも扱うと思いますが、分配法則を用いた計算には注意してください。たとえば、$3e+5e$というのは、$(3+5)\times e$　つまり$8e$となります（$3e$というのは$3\times e$のことです。そろそろ$\times$の記号は省略していこうと思います。）　eがπや他の記号になっても、扱いは同じです。

ただし、有理数から特定の操作をして生まれてくる無理数の計算は、少しややこしくなるので注意してください。たとえば、$\sqrt{\ }$がからむ計算などです。$\sqrt{2}+\sqrt{3}$はそのままでいいのですが、$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$は2になります。もともと有理数を操作して作った数なので、特定の操作をすると有理数に戻ったりするわけですね。こういった数の扱いは、それぞれの記号、つまり$\sqrt{\ }$なら$\sqrt{\ }$の扱いのところで個別に練習するしかありません。

そういうわけで、ここで無理数に関してのまとめです。

＜まとめ（無理数）＞

・　有理数を数直線上に並べたとき、隙間ができる。

・　この間を埋める数が「無理数」である。

・　無理数は分母分子が整数である分数では表現できない。（つまり、小数で表現すると、無限に続く循環しない小数になる。）

・　有理数と無理数をひっくるめて（つまり、数直線上にある数全体のことをさして）「実数」という。
・　無理数が絡む計算は、基本的には「混ぜるな危険」だが、有理数から特定の操作をして生まれてきた数に関しては、特別な計算ルールがあることもあり、それらは個別に学習する必要がある。

1.1.7　虚数

自然数から0、負の数、有理数、無理数、と拡大してきて、ようやく「数」が直線上に並びました。

半ば無理矢理ではありますけども、「無理数」という概念を使って、よくわからないけどわからないやつは全部「無理数」ということにしてしまいましたので、この直線上にある「数」は一応すべて捉えたことになりました。これでひとまず安心……と思いきや、世界はそんなに甘くないんですね。本当にこの数直線上にしか「数」がないのか、というとどうもそうではないらしい、ということが薄々わかってきたところで「虚数・複素数」の登場です。

負の数の導入によって、引き算ができるようになりました。有理数の導入によって、割り算もできるようになりました。無理数の導入によって、正方形の対角線の長さも表せるようになりました。しかし、それでも表せない「数」というのが出てきました。

どういう数かというと、$x^2+1=0$の解です。これは変形すると$x^2=-1$となりますので、つまり、「2回かけて-1になる数」はなにか、ということです。当然、1を2回かけても1×1で1にしかならないのはわかりきっていますが、それでは-1かな、と思うと-1×-1も1になってしまいます。そもそも、正の数は2回かけると正の値になりますし、負の数も、2回かけると正の値になります。2回かけて負の値になる数、とは一体なんだろう、と考えてみると、そういう数は実数の中にない、ということに気づきます。（中学校の数学では、こういった二次方程式は「解なし」となりますが、これは昔人類が2-3=?を「答えがないよ」と言っていたのと同じ感じです。

そこで、そういった数を表すために、虚数単位「i」を導入します。すなわち、

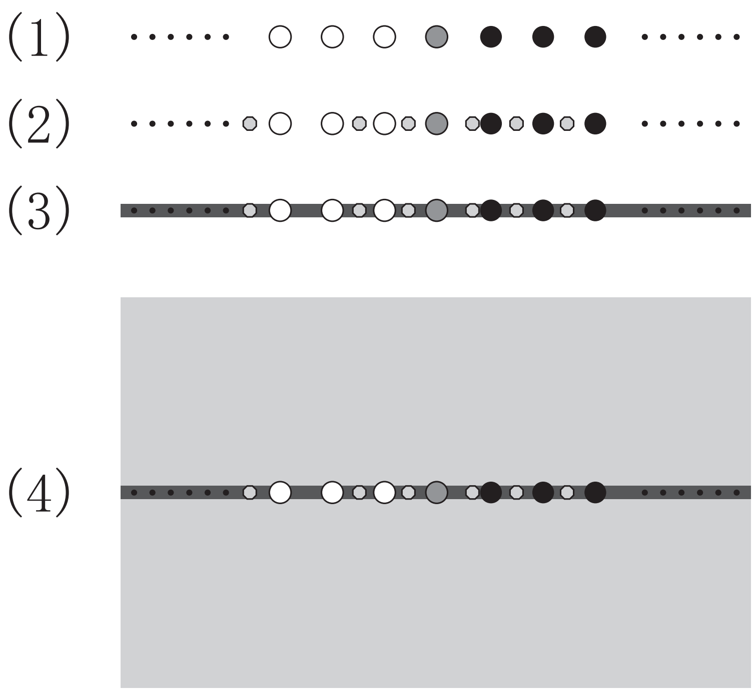
$x^2+1=0$　となる x を i とする

と定めるのです。この i を用いなければ表現できない数を、虚数（imaginary number）とよび、この虚数と先ほどの実数をあわせて「複素数」といいます。虚数や複素数についての詳しい説明や、計算の手順などは、本講座中盤、「§2　オイラーの公式の登場人物」のところでやりたいと思います。

＜まとめ＞
・　数直線上にない数も存在する。（数直線上以外にも数が存在する。）
・　その中で、虚数単位 i（$x^2+1=0$　となる x）を用いて表現できる数を「虚数」という。
・　実数と虚数をひっくるめて（つまり、平面上に存在する数全体のことをさして）「複素数」という。
・　複素数の扱いについては、本講座「§2　オイラーの公式の登場人物」のところで詳しくやりますので、乞うご期待！

＜数の世界の拡がり　まとめ＞

そういうわけで、今までやってきた数の世界を順に見て行きましょう。もう一度先ほどの図に戻ります。まずは、自然数があり、そこに0、負の数が加わりました（1)。ここまでの数を「整数」といいます。この、整数と整数の隙間に分数で表せる数も入ってきて、これと先ほどの整数もすべてあわせたものが有理数です（2)。さらにこの有理数同士の間を埋めるものが無理数であり、有理数と無理数をあわせてできた数直線全体が実数です（3)。そして最後に直線上以外の数（虚数）を含めて、この平面全体にある数が「複素数」ということでした（4)。



　これより外にも「数」の概念を拡張していくことはできますが、本講座で必要な数の概念（そして高校数学レベルで学習する数の概念）は、ひとまずここまでです。それぞれの数の特徴や計算方法などは、ここではまとめませんが、各自でもう一度不安なところは復習しておいてください。

　ここで、「§１　数学的基盤の整備」の「1）　数の世界の拡がり」はおしまいです。次回は「2）　数と式」に入ります。予定としては、次回で「§1」が終わり、その次の回から中編「§２　オイラーの公式の登場人物」に入ります。