おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第５回授業内容＞

§２　オイラーの公式の登場人物

1）　円周率

　（1）　円周率とはなにか

　（2）　円周率の値を求めて

　（3）　弧度法

2）　三角比、三角関数

3）　虚数、複素数

4）　指数、対数

---

§２　オイラーの公式の登場人物

　ということで、前編「数学的基盤の整備」が終わりました。ここから中編、「オイラーの公式の登場人物」に入っていきます。

　数式を読むときは、使われている記号や文字、それらのつながり方について丁寧に見ていかなければいけない、という話をちょうど前回しましたね。そこで、まずはオイラーの公式に使われている文字や記号などについて見ていこう、というのが、この中編の役割です。もう一度、「オイラーの公式」と「オイラーの等式」を見てみましょう。

$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

　上の式がオイラーの等式、下の式がオイラーの公式です。

　まず、オイラーの等式の方に出てきている π、これは円周率を表します。その次に、オイラーの等式のほう、sin や cos は三角関数の記号です。さら

に両方に登場している i というのは、複素数を表現するときに使う「虚数単位」でした。最後に、e は、「ネイピア数」といって、値としては既に話題に出しましたが、2.718281828459045…… という値です。これは「指数」や「対数」という概念に関係する文字です。同時に、$○^?$ という表記も指数に関する表記なので、最後にこれらを一緒に見ていきます。

2.1　円周率 π

2.1.1　円周率とはなにか

それではまず、円周率からです。

最初にまず、円周率とはなんなのか、という話ですけども、これはそのまま読むと「円周の率」ですね。「率」というのは「割合」という意味で、これは、直径の長さに対する、円周の長さの割合、ということです。つまり、円周の長さが円の直径の長さの何倍か、というのを表したのが「円周率」です。

直径の長さ　：　円周の長さ　＝　1　：　？

直径の長さ $\times$ ？＝円周の長さ

これらの？の値は、常に一定の値になります。どんな円を描いても、直径の長さと円周の長さの比は一定なのです。ここでこの比の値を「円周率」とよび、π と表すことにしたのです。

近年、円周率が 3 になったとかならないとかで大騒ぎをしていましたが、そもそもまず大事なことは、この「円周率」がどんな円でも一定になりますよ、ということです。本当に一定になるのか、という話については、ざっくり説明すると「円はすべて相似形だから」ということになります。「相似形」というのは同じ形、ということで、数学的に定義すると「拡大もしくは縮小した図形」のことです。相似形だと、対応する長さの比は一定になるため、「直径：円周」も常に一定の値になります。

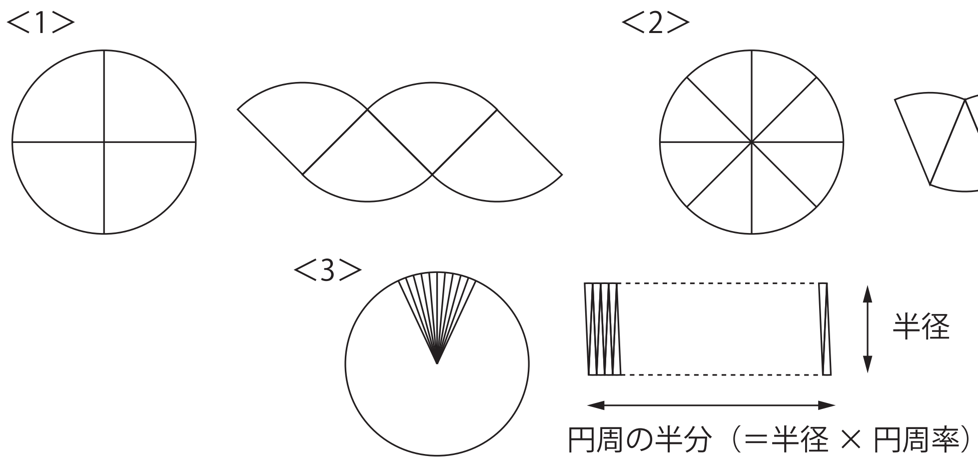
＜円周率と円の面積＞

さて、円周率は「直径の長さ」と「円周の長さ」の比でしたが、「半径の2乗の値」と「円の面積」の比もこの円周率の値に一致します。

どういうことかというと、$S = r^2 \times \pi$ということで、これはもっとわかりやすく言うと、小学校で習った円の面積の公式、

円の面積＝半径 × 半径 × 円周率

です。これについてはやはり、本当にそうなるのか、ということを考える必要があるでしょう。小学生向けの説明としては、以下の図のように、円を細く切り分けて並べ替えていく、というものがあります。（小学校ではこういうふうに“ 説明 ”されたかもしれません。）

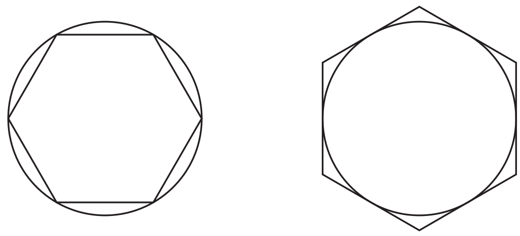


つまり、＜1＞や＜2＞のように、円を何等分かして、それを互い違いにならべていきます。その分ける数を増やしていくと、＜3＞のように平行四辺形に近づいていき、分ける数が無限に大きくなると平行四辺形に一致します。平行四辺形の面積は「底辺 × 高さ」で求められますが、ここで、この平行四辺形の「高さ」はもとの円の半径の長さと同じです。「底辺」は円周の半分なので「直径 × 円周率 ÷ 2」となり、「直径 ÷ 2」だけを先に考えると、これはつまり「半径」ということなります。つまり、「底辺」は「半径 × 円周率」です。よってこの平行四辺形の面積は「半径 × 半径 × 円周率」となります。（円の面積も、同じく「半径 × 半径 × 円周率」です。）

もちろん、これはあくまで“ 説明 ”ですので、数学的には少しものたりません。そこで、今回はこの「証明」についても触れておきましょう。ちなみに、この「円の面積の公式」を最初に証明したのは紀元前3世紀の数学者、アルキメデスです。（それなりに難しいですが、理解できなければ本講座を

先に進めていけない、というわけではありませんので、ご安心下さい。しかし、理解できるよう頑張っていただければ、本講座の後半のほうで少し役に立つかもしれません。)

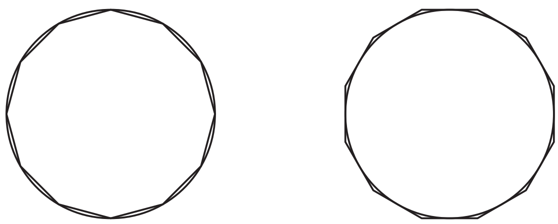
アルキメデスは、まず円そのものではなく、円に内接・外接する正多角形を考えました。例えば、正六角形を考えてみます。



そうすると、「円の面積」は「内接する正六角形の面積」より大きく、「外接する正六角形の面積」より小さくなります。ここで「円の面積」を S、「内接する正六角形の面積」を $S(6)$、「外接する正六角形の面積」を $S'(6)$ として数式に表すと、

$$S(6) < S < S'(6)$$

となりますね。同じように、正十二角形でも考えてみます。



これも先ほどと同じように、「内接する正十二形の面積」を $S(12)$、「外接する正十二角形の面積」を $S'(12)$ として数式に表すと、

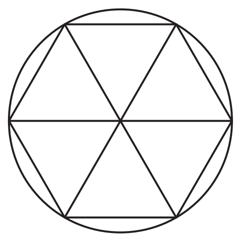
$$S(12) < S < S'(12)$$

となりますが、先程よりも S の取りうる範囲の幅が縮まったのが分かりますか。円の面積 S の値は変わりませんが、$S(12)$ の値が $S(6)$ の値より大きく、$S'(12)$ の値が $S'(6)$ の値よりも小さいことは、図から明らかです。アルキメデスは、この内接・外接する正多角形の頂点の数を増やしていくと、円の面積 S の値が絞り込めるのではないか、と考えたのです。

$S(N) < S < S'(N)$

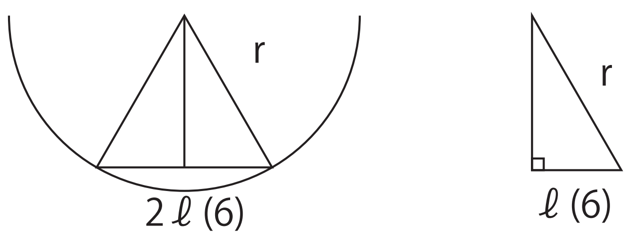
（S（N）、$S'(N)$ というのは、それぞれ内接・外接する正 N 角形の面積です。前回ご説明した“ 関数 ”の表記です。正多角形の頂点の数 N を決めると面積の値が決まります。）

そこで次に、内接・外接する正多角形の面積を考えていかなければなりません。形が四角形や三角形であれば、それぞれ面積を求める方法が個別にあります。しかしここでは、頂点の数Nをどんどん変えていき、それぞれの「正 N 角形の面積」を求める必要があります。そこで、図のように分割して考えてみましょう。（まずは内接N角形の面積から考えていきます。半径はrにしておきましょう。）



こうすると、$S(6) =$（分割した三角形の面積）$\times 6$ です。この方法なら、$S(N) =$（分割した三角形の面積）$\times N$ と考えることができますね。

三角形の面積は、底辺 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{2}$ です。ここで内接する正六角形の1辺の長さを $2 \times l(6)$ としておきましょう。（単に $l(6)$ としてもいいのですが、2をかけておいた方が後々の計算が楽なので、こういう形にしています。余裕のある人は、$l(6)$ だとどういう計算になるのか、というのも是非やってみてください。また、もちろん $l(6)$ というのは関数で、12角形の場合は $l(12)$ というふうになります。）



分割した三角形の面積は、$2l(6) \times$ 高さ $\times \frac{1}{2}$ で求められます。つまり、$S(6) = 2l(6) \times$ 高さ $\times \frac{1}{2} \times 6$ ですね。あとは高さです。高さを考えるには、ピタゴラスの定理を使います。（ピタゴラスの定理は第3回の講義内容、無理数の項を参照して下さい。）

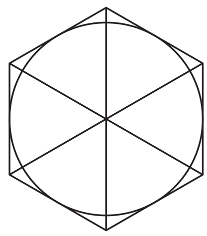
（高さ）$^2 + l(6)^2 = r^2$なので、（高さ）$^2 = r^2 - l(6)^2$。
よって、（高さ）$= \sqrt{r^2 - l(6)^2}$ です。つまり

$$\begin{aligned} S(6) &= 2l(6) \times \sqrt{r^2 - l(6)^2} \times \tfrac{1}{2} \times 6 \\ &= l(6) \times \sqrt{r^2 - l(6)^2} \times 6 \end{aligned}$$

となりました。今は正六角形を使って考えていますが、一般化、つまりN角形について考えると、

$$S(N) = l(N) \times \sqrt{r^2 - l(N)^2} \times N$$

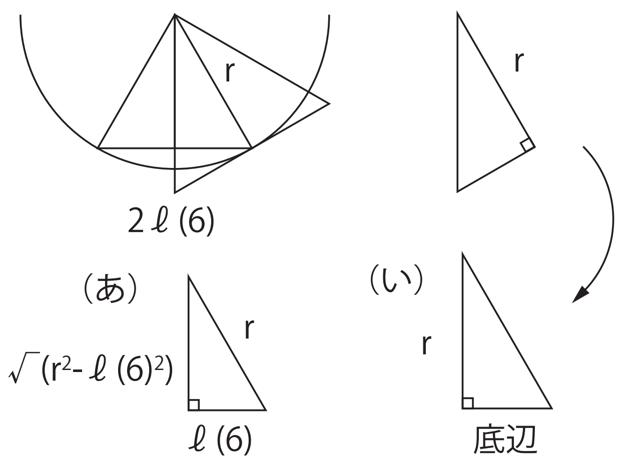
となりますね。外接する方の図形の面積も同じように考えてみましょう。



やはりこれも、$S'(6) =$（分割した三角形の面積）$\times 6$ です。分割した三角形について、今回は高さがr（半径）というのがすぐに分かります。

よって、$S'(6) =$ 底辺 $\times r \times \frac{1}{2} \times 6$ です。

底辺の長さは正六角形の1辺の長さなので、$l'(6)$ などにしてもいいのですが、ここはl（6）を使って表す方法があるので、そちらで考えてみます。使わないで済むのであれば、なるべく新しい文字は使わないほうがいいのです。



ここでは相似形をつかいます。内側の正六角形を「分割した三角形」と、外側の正六角形を「分割した三角形」は同じ形、つまり、相似形です。当然、

それらを半分ずつにした（あ）と（い）の直角三角形同士も同じ形、つまり、相似形です。相似形なら、対応する辺の長さ同士の比が等しいのは先ほどお話したとおりです。（あ）を見ると、底辺は高さの $\frac{l(6)}{\sqrt{r^2-l(6)^2}}$倍になっているので、（い）の底辺も高さの$\frac{l(6)}{\sqrt{r^2-l(6)^2}}$倍になるはずです。つまり、（い）の底辺は、$r \times \frac{l(6)}{\sqrt{r^2-l(6)^2}}$ です。これは、外側の正六角形の一辺の長さの半分なので、外側の正六角形の１辺の長さは $2 \times r \times \frac{l(6)}{\sqrt{r^2-l(6)^2}}$ となり、

$$\begin{aligned} S'(6) &= 2 \times r \times \tfrac{l(6)}{\sqrt{r^2-l(6)^2}} \times r \times \tfrac{1}{2} \times 6 \\ &= r \times \tfrac{l(6)}{\sqrt{r^2-l(6)^2}} \times r \times 6 \end{aligned}$$

となります。これを一般化すると、

$S'(N) = r \times \frac{l(N)}{\sqrt{r^2-l(N)^2}} \times r \times N$　となります。

$S(N) < S < S'(N)$ でしたので、ここで一度今までわかっていることをまとめると、

$$l(N) \times \sqrt{r^2 - l(N)^2} \times N < S < r \times \frac{l(N)}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}} \times r \times N$$

となります。この式を少し見やすい形に整理すると、

$$l(N) \times N \times \sqrt{r^2 - l(N)^2} < S < l(N) \times N \times \frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}} \times r$$

（左側の式と右側の式を似たような形にするため、掛け算の順番を入れ替えました。）

ここまでは大丈夫でしょうか。ここから先は、$l(N) \times N \times \sqrt{r^2 - l(N)^2}$ などがどういう値なのか、ということを考えていきます。

ここで一度面積の話はリセットして、内接・外接する正多角形の、今度は「周りの長さ」について考えてみます。内接する正 N 角形の周りの長さを $L(N)$、円の周りの長さを L、外接する正 N 角形の周りの長さを $L'(N)$ とすると、

$L(N) < L < L'(N)$

です。$L(N)$ は、先ほど正 N 角形の 1 辺の長さを $2l(n)$ としたので、これを利用して表現すると、$L(N) = 2l(n) \times N$ となります。また、$L'(N)$ に関しては、先ほど「外接する正六角形の 1 辺が $2 \times r \times \frac{l(6)}{\sqrt{r^2 - l(6)^2}}$」と計算できたので、これを一般化して、正 N 角形の 1 辺の長さが $2 \times r \times \frac{l(N)}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}}$、つまり、$L'(N) = 2 \times r \times \frac{l(N)}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}} \times N$ です。また、$L = 2r\pi$ なので、これらを先ほどの不等式に代入すると、

$$2l(n) \times N < 2r\pi < 2 \times r \times \frac{l(N)}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}} \times N$$

となります。これをまた見やすい形に整理すると、

$$l(n) \times N < r\pi < l(N) \times N \times \frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}}$$

となります。（今回は先程と同様に掛け算の順番を入れ替えた後、全体を 2 で割りました。）

さて、ここからが仕上げです。

$$l(n) \times N < r\pi < l(N) \times N \times \frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}}$$

$$l(N) \times N \times \sqrt{r^2 - l(N)^2} < S < l(N) \times N \times \frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}} \times r$$

今、円に内接・外接する正多角形の面積や周の長さを考えることで、上記 2 つの式が得られました。ここで N を大きくしていくことを考えます。つまり、内接・外接する正 N 角形の頂点の数を増やしていくのです。そうすると、周の長さの式も、面積の式も、範囲がどんどん小さくなっていきます。まずは周の長さの式に注目して下さい。

この式の左側「$l(n) \times N$」と右側「$l(N) \times N \times \frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}}$」の違いは、$\times \frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}}$ の部分だけです。N を大きくしていくと $l(N)$ が小さくなっていくので、$l(N)^2$ は 0 に近づいていき、$\sqrt{r^2 - l(N)^2}$ も $\sqrt{r^2 - 0}$（$= \sqrt{r^2} = r$）に近づいていきます。そうすると、$\frac{r}{\sqrt{r^2 - l(N)^2}}$ は $\frac{r}{r} (= 1)$ に近づいていく、ということです。これは本講座の後半、極限のところで詳しくやりますが、2 つの別の値が同じ値に近づいていくとき、間に挟まれている値も同じ値に近づい

ていきます。つまり、$l(n)\times N$も$l(N)\times N\times\frac{r}{\sqrt{r^2-l(N)^2}}$も同じ値に近づいていくので、その間に挟まれた$r\pi$も同じ値に近づく、ということです。もちろん「近づく」と言っても「$r\pi$」の値はNを大きくしても変化するわけではありませんので、$l(n)\times N$や$l(N)\times N\times\frac{r}{\sqrt{r^2-l(N)^2}}$の値が$r\pi$に近づく、と考えればいいでしょう。

さてここで、面積の方の式を見て下さい。

$$l(N)\times N\times\sqrt{r^2-l(N)^2}<S<l(N)\times N\times\frac{r}{\sqrt{r^2-l(N)^2}}\times r$$

こちらも、Nを大きくしていきたいのですが、Nを大きくしていくと、「$l(N)\times N$」や「$l(N)\times N\times\frac{r}{\sqrt{r^2-l(N)^2}}$」の値は「$r\pi$」に近づいていく、ということがわかったのでした。

つまり、$l(N)\times N\times\sqrt{r^2-l(N)^2}$は$r\pi\times\sqrt{r^2-l(N)^2}$に近づく、ということです。そして、$N$が大きくなれば$\sqrt{r^2-l(N)^2}$は$\sqrt{r^2-0^2}(=\sqrt{r^2-0}=\sqrt{r^2}=r)$に近づくので、最終的に$l(N)\times N\times\sqrt{r^2-l(N)^2}$は$r\pi\times r=r^2\pi$に近づきます。

同様に、$l(N)\times N\times\frac{r}{\sqrt{r^2-l(N)^2}}\times r$の、$l(N)\times N\times\frac{r}{\sqrt{r^2-l(N)^2}}$の部分が$r\pi$に近づく、ということなので、この値全体は$r\pi\times r$、つまり、$r^2\pi$に近づきます。

そういうわけで、Sを挟む2つの値、$S(N)$と$S'(N)$は、Nを大きくしていくと両方とも$r^2\pi$に近づいていく事がわかりました。よって、Sも$r^2\pi$に近づいていくはずです。今回も、SはNによって変化するわけではありませんので、これはつまり、

$$S=r^2\pi$$

となり、「円の面積 = 半径 × 半径 × 円周率」という円の面積の公式が証明された、ということになります。

＜πにまつわる話＞

さて、ここからは少しπにまつわる小話をいくつかしておきましょう。

まず一つ目は、πという記号についてです。πという記号ははじめ、「円

周の長さ」そのものを指していましたが、それを「円周率」を表す記号として使い出したのは、1706 年、 イギリスの数学者、ウィリアム・ジョーンズ（William Jones, 1675-1749) です。また、この π という記号が広まったのは、オイラーのおかげ、という話もあります。いろんな記号について、オイラーが使い始めたとか、広めた、という話がありますが、これはオイラーがある種のスターだった、ということでもあります。つまりまず、オイラーの論文が広く読まれた、ということ、それから、その論文の書き方や記号の使い方を真似をされるほど他の数学者の憧れの存在でもあった、ということです。

ちなみに、π の由来は、periphery（周囲）の頭文字 p のギリシャ文字です。

もう一つは、π の値は無理数ですよ、という話です。これはすでに何度かお話しましたね。円周率の値についての探求は随分昔から続いていますが、その値が無理数だ、と証明されたのは、割と最近、1761 年の話です。これを証明したのがランベルトというドイツの数学者です。また、1794 年にはルジャンドルが π^2 も無理数であることを証明しました。（πが無理数なら、π^2 も無理数になるのは当然では、と思うかもしれませんが、そうではありません。$\sqrt{2}$という無理数の 2 乗が 2 という有理数になる、という例もあります。そもそも本講座のメインテーマ、オイラーの等式も、$e^{i\pi} = -1$ というふうに、無理数の虚数・無理数乗が極めてシンプルな数になっています。ちなみに、π^πは無理数かどうか、未だにわかっていません。）

π が無理数であることの証明には、さまざまな方法はありますが、1947 年に発表されたニーベンの証明が一番初等的です。以前、$\sqrt{2}$が無理数である、というのを証明したときと同じように、まずはπが有理数であると仮定する、つまり、$\pi = \frac{a}{b}$として矛盾を導いていきます。（具体的にそこからどういう展開で証明していくかはここではやりません。）

最後にもう一つ、円周率は「超越数」でもあります。超越数、という単語は初めて出てきましたが、「有理係数の代数方程式の解にならない」数のことです。余計にややこしくなりましたね。「代数方程式」というのは、

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

というような、「x の何乗か」と「それを何倍か」したものを足したり引

いたりしただけて作った方程式のことです。「有理係数」というのは、「何倍か」の部分、つまり、a_nやa_{n-1}の部分がすべて有理数ですよ、ということです。この「πが超越数である」ことを証明したのは、1882年、リンデマンです。

これが証明されたことによって、ギリシャから数々の数学者を悩ませてきた「三大作図不可能問題」のうち、「円積問題」が「不可能」であることも同時に証明されました。(円積問題、というのは、「ある円が与えられたとき、それと同じ面積の正方形を作図することができるか。または、その逆に、ある正方形が与えられたとき、それと同じ面積の円を作図することができるか」という問題です。ちなみに、「三大作図不可能問題」の残りの2つは「角の三等分(ある角が与えられたとき、それを三等分できるか)」と「立方体倍積問題(ある立方体が与えられたとき、体積がそのちょうど倍になる立方体を作図できるか)」で、これらも19世紀の後半に不可能であることが証明されています。)

＜まとめ＞

・　すべての円において、直径と円周の長さの比は一定であり、その比率を表したものが円周率(π)である。

・　半径の2乗と円の面積の比も常に一定であり、この比率も円周率に一致する。

・　円周率を表す文字としてπという記号を使う。これは、「periphery(周囲)」の頭文字pのギリシャ文字である。

・　円周率の値は無理数であり、超越数でもある。

2.1.2　円周率の値を求めて

さて、円周率が一定の値になる、という話をしましたが、具体的な値はいくらなのでしょう。小学校では、3.14と習いました。しかしすでに何度かご紹介したとおり、円周率は無理数なので、途中で終わったりしません。実際には3.14159265……と続いていきます。この値を計算してきたのも、もちろん歴代の数学者たちです。ここでは、その円周率の具体的な値を探る試みについて触れていきたいと思います。

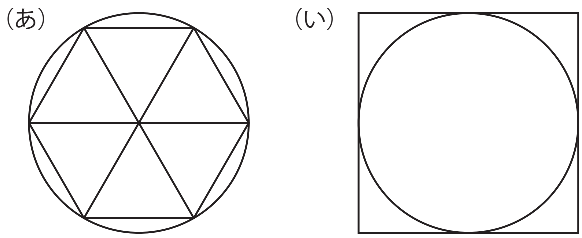
＜原始的な方法（幾何学的アプローチ）＞

円周率が一定の値だろう、という事実はずいぶん昔（紀元前2000年ごろ）からすでに知られていました。また、大体3よりちょっと大きいくらいだろう、というのも知られていました。しかしそれは、経験的に、という話であり、数学的な裏付けがあるものではありません。もちろん、円周率は無理数なので、実際に測ってみても正確な値を知ることはできません。そこで最初に出てきた計算方法が、幾何学的なアプローチ、つまり、図形を利用した方法です。簡単な例を考えてみましょう。

【Question1】

$3 < \pi < 4$ であることを証明してください。

【解説】



図の円の半径は、それぞれ1とします。（あ）のように、円に内接する正六角形を考えると、円の周の長さは正六角形の周の長さより大きくなります。ここで、正六角形の周の長さは6、円周の長さは 2π なので、

$$6 < 2\pi \quad \rightarrow \quad 3 < \pi$$

となります。また、（い）のように、円に外接する正方形を考え、今度は面積を考えると、正方形の面積は明らかに円の面積より大きくなります。正方形の面積は4、円の面積は π なので、

$$\pi < 4$$

となります。円周率の値を求める原始的な手法は、このように円に内接・外接する正多角形の周の長さや面積を利用する方法です。すでにお気づきかとは思いますが、先ほどのアルキメデスの円の面積の公式を証明するのに使った方法も、根本的には同じです。実際、アルキメデスも円に内接・外

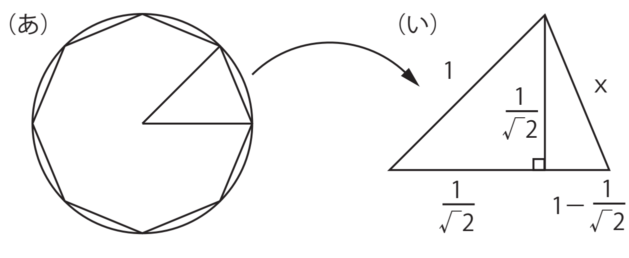
接する正96角形を考え、$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$　（$3.140845\cdots\cdots < \pi < 3.142857\cdots\cdots$）まで範囲を絞りこみました。この段階で、3.14までは確定したことになります。

【Question2】
円周率が3.05より大きいことを証明せよ。（2003年　東京大学）

少し話はそれますが、東京大学の入試で、このような問題が出題されました。この問題が出た当時、「これはいい問題だ！」と関係各所で絶賛されていただのですが、私はそれには少し賛成しかねます。ちょうど、円周率が3になる云々で騒がれていた時期であり、メッセージ性の強い問題であったことは確かです。なんだかんだで国内の大学の最高峰である「東大」が出題した、ということに、大きな意味があることも間違いないでしょう。

しかし、この問題が思考力を問うかどうか、という話は、少し疑問に思います。なぜなら、今まで見てきたような、「内接・外接する正多角形を利用する」という発想を知っていれば、この問題はそれほど難しくないからです。そういう意味では、この問題で問われているのは円周率に関する歴史的な背景知識、平たく言えば教養なのかもしれません。（それはそれでアカデミックな匂いはしますけどね。）

さて。実際に解いていくのは、それほど難しくはありません。「大きいことを証明せよ」なので、内接するほうの多角形を考えましょう。正六角形だと先ほどやったとおり、「3より大きい」としか言えないので、それより頂点の多いもので考えます。八角形や十二角形が計算しやすいと思いますが、ひとまずここは八角形でやってみましょう。



半径が1の円と、円に内接する正八角形を考えます（あ）。そうすると、（正八角形の周の長さ）$< 2\pi$です。この正八角形を8等分した三角形をひとつ取り出します（い）。この頂点から底辺に向かって垂直な線を引くと、それぞれの辺の長さは図のようになります。（8等分すると中心角が45度なの

で、2つにわかれたうちの左側が直角二等辺三角形になり、辺の長さの比が $1:1:\sqrt{2}$になります。）　このとき x が正八角形の1辺の長さなので、今のところ、

$$x \times 8 < 2\pi$$

ということがわかります。また、ピタゴラスの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 \\ &= \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{\sqrt{2}} \\ &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって、$x = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ とわかります。ゆえに、

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} \times 8 < 2\pi$$

$$4\sqrt{2-\sqrt{2}} < \pi$$

ここから最終的には、$3.05 < 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ であることが言えれば $3.05 < 4\sqrt{2-\sqrt{2}} < \pi$ となり、問題で聞かれている $3.05 < \pi$ が証明できます。あとは、順に計算していくだけです。

$3.05 < 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ が言えればいい
→　$0.7625 < \sqrt{2-\sqrt{2}}$ が言えればいい
→　$0.58140625 (= 0.7625^2) < 2 - \sqrt{2}$ が言えればいい
→　$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots\cdots$なので、$2 - \sqrt{2} = 0.5857\cdots\cdots$

ということで、$3.05 < 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ なので、$3.05 < \pi$ は証明できます。（ただし、「証明」としては最後の計算は逆の順に書いていかなければなりません。）

正十二角形を利用するパターンは、皆さん各自でやってみてください。正八角形より実際の値が大きくなる分、途中の見積もりは多少甘めでも大丈夫なはずです。

この、正多角形を用いて計算する方法は、「原始的な手法」とは言いましたが、ヨーロッパでは 1600 年代まで主流でした。日本でも 17 世紀後半ごろ、関孝和が円周率を計算しましたが、それもこの幾何学的なアプローチの延長です。

＜解析学的な手法＞

数学が発展し、級数や微積分の概念が登場すると、円周率の計算に解析学的な手法が導入されていきます。地域にもよりますが、インドでは 1400 年頃から、ヨーロッパでは 1600 年代、日本では 1700 年代以降のお話です。

1400 年頃、インドのマーダヴァは、以下のような級数を発見します。（級数、というのは、数列をどんどん足していった和、というふうにイメージしてください。ちなみに、本講座の後半でもまた出てきます。）

$$\theta = \tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5} - \frac{\tan^7\theta}{7}\cdots\cdots$$

この式は、

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\cdots\cdots$$

という式と同じ意味を持つのですが、$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ になるので、つまり、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots\cdots$$

となり、これを計算して 4 倍すると π の値が求まるのです。（ちなみにこの式は、ヨーロッパでは 1670 年代になってから、グレゴリー、ライプニッツによってようやく発見されました。）

しかし、この式には少し問題がありました。それは「収束が遅い」ということです。この式を計算していくと最終的には π の値に近づいていくのですが、「収束が遅い」というのは、その正確な値に近づくまでに計算しなければならない量が多い、ということです。そこで、ここから先は、より「収束の速い」級数を探していく方向に進んでいきます。以下にその代表的な例をいくつか挙げてみます。

マチンの公式（1706 年）

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

オイラー（18 世紀）

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}$$

cf. $\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots\cdots$（バーゼル問題）

ラマヌジャン（1910 年）

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(4^k 99^k k!)^4}$$

BBP の公式（1995 年）

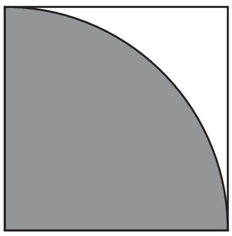
$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n-1} - \frac{2}{8n+1} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

BBP の公式は、16 進数での表記にすると、直接「N 桁目」を計算することができます。

20 世紀半ば以降、これらの数式の計算にコンピュータが用いられるようになり、現在では小数点以下 10 兆桁以上が計算されているようです。

＜ちょっと変わった方法：モンテカルロ法＞

最後に、数学的な手法ではありませんが、おまけとして「モンテカルロ法」のご紹介もしておきます。モンテカルロ法、というのは、確率を利用した計算方法です。



図のような、正方形の中に四分円を描いたものを用意します。そして、この正方形の中にランダムで点をプロットしていき、その点が四分円の中に入っているかどうかを判定します。たくさん点を打っていくと、この正方形の中に均等な確率で点が打たれていくはずなので、全体の点の数に対する四分円の中に入っている点の数の割合は、正方形の面積に対する四分円

の面積の割合と等しくなるだろう、という考え方です。正方形の1辺を1とすると、四分円の面積は $\frac{\pi}{4}$ なので、つまり

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\text{四分円の中にある点の数}}{\text{打った点の総数}}$$

$$\pi = \frac{\text{四分円の中にある点の数}}{\text{打った点の総数}} \times 4$$

ということです。もちろん、数学的な厳密さはありませんが、そういうふうな円周率の求め方もあるよ、ということで。

＜まとめ＞

・　円周率は無理数であるので、正確に実測することはできない。そのため、値を求めるためには計算に頼る必要がある。

・　最も原始的な考え方としては、円に内接・外接する多角形の円周や面積を考え、範囲を絞り込む方法である。

・　17世紀以降、解析学的なアプローチも取られるようになった。

・　近年（20世紀半ば以降)、その計算にコンピュータが利用されるようになり、現在は小数点以下10兆桁以上が計算されている。

2.1.3　弧度法

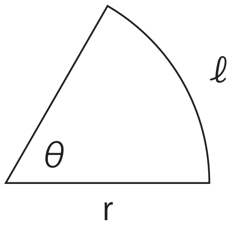
さて、そういうわけで、円周率についていろいろと見ていきましたが、やはり肝心なのは、なぜこの記号が「オイラーの公式」に登場するか、というところでしょう。そのカギを握るのが「弧度法」です。

「弧度法」というのは、端的に言ってしまえば、角度を表すための方法です。角度を表す方法、というと、小学校では「〇〇度」という表し方を習いましたね。一周すると360度、直線で180度、直角だと90度、というやつです。こういった角度の表し方は「度数法」といいますが、それとは別に、角度の表し方がある、という話です。

＜弧度法とは＞

弧度法とは、扇型の中心角を、「半径」と「弧の長さ」の比の値を利用して表現する方法です。（ちなみに弧度法を用いるとき、角度の単位は「度」

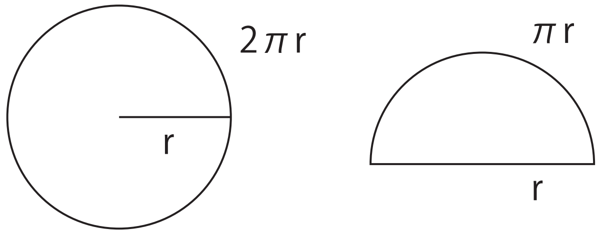
ではなく「ラジアン（rad）」ですが、省略される場合もあります。）



例えば、図のような扇形があった場合、扇型の中心角 θ は、

$\theta = l \div r$

で表されます。具体的には、360 度は 2π ラジアン（$= 2\pi r \div r$）、180 度は π ラジアン（$= \pi r \div r$）です。



角度が同じであれば、半径の長さに関係なく、「半径と弧の長さの比」は一定になります。弧度法はそれを利用しています。

いきなり弧度法で書かれている数式を見ると、「難しい」と思うかもしれませんが、これに関しては慣れていけば大丈夫です。まずは具体的にさまざまな角度を考えてみましょう。度数法から弧度法へ、または弧度法から度数法へ変換する練習です。

【Question3】

度数法で表された次の角を、それぞれ弧度法を用いて表してください。

360 度 =	180 度 =	90 度 =
60 度 =	45 度 =	120 度 =
30 度 =	300 度 =	270 度 =

【Question4】

弧度法で表された次の角を、それぞれ度数法を用いて表してください。

$2\pi =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\pi}{3} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\pi}{4} =$

$\pi =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{5\pi}{6} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{5\pi}{4} =$

$\dfrac{\pi}{2} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{7\pi}{4} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{2\pi}{3} =$

慣れないうちは、何かを基準にして、それに対して何倍か、と考えていきましょう。例えば、60 度は 180 度の $\frac{1}{3}$なのでπの$\frac{1}{3}$、つまり$\frac{\pi}{3}$ となります。

また、だいたいの大きさを把握しておくのも、弧度法に慣れるための一つのコツではあります。180 度より小さい角度は π より小さく、180 度より大きい角度は π より大きくなります。

【答え】

代表的な角度は以下のようになります。

$$360\text{度} = 2\pi \quad 180\text{度} = \pi \quad 90\text{度} = \frac{\pi}{2} \quad 270\text{度} = \frac{3\pi}{2}$$

$$60\text{度} = \frac{\pi}{3} \quad 120\text{度} = \frac{2\pi}{3} \quad 240\text{度} = \frac{4\pi}{3} \quad 300\text{度} = \frac{5\pi}{3}$$

$$30\text{度} = \frac{\pi}{6} \quad 150\text{度} = \frac{5\pi}{6} \quad 210\text{度} = \frac{7\pi}{6} \quad 330\text{度} = \frac{11\pi}{6}$$

$$45\text{度} = \frac{\pi}{4} \quad 135\text{度} = \frac{3\pi}{4} \quad 225\text{度} = \frac{5\pi}{4} \quad 315\text{度} = \frac{7\pi}{4}$$

＜なぜ弧度法を使うか＞

さて、それではなぜ弧度法を使うのでしょうか。小学校では角度は度数法で習いましたし、歴史上でも度数法のほうが先に発達しました。実用的には度数法でも十分間に合っているようにも思えます。しかしそれでも後から弧度法を定義し、導入した、ということは、弧度法には度数法にないメリットが有る、ということです。

なぜ弧度法を使うか、その理由のひとつめは、弧度法のほうが“より自然”だから、です。そもそも度数法というのは、「1 周を 360 としたときにいくらか」という角度の測り方です。しかしこの「360」という数字に果たし

て根拠があるのでしょうか。別に1周を100としてもよさそうではありませんか。実際のところ、1周が360である根拠は1年の日数（昔は1年が360日だった）と言われたり、360がいろいろな数で割り切れる数だからと言われたりしています。つまり、“（人間が）使いやすい”という理由で恣意的に決められたものなのです。

実務的にはそれでいいでしょう。しかし、数学者はそうは考えません。数学者は基本的に、人為的な要素を排除したがります。なぜなら、数は人の知性と関係なく存在するからです。そういう意味で、弧度法は極めて“自然”です。長さの比の値を用いて表されたラジアンは、「無次元量」つまり単位がない量です。「ラジアン」って単位じゃないの、と思うかもしれませんが、ここでいう「単位がない」というのは、人為的な基準がない、という話でもあります。人為的な基準のない「無次元量」ということは、普通の数と同様に扱うことができるのです。

弧度法を使うもう一つのメリットは、弧度法を使うといろんな式が簡単になる、ということです。たとえば、扇型の弧の長さや面積を考えるとします。

【Question5】
半径がr、中心角がθの扇型の弧の長さはいくらでしょう。

【Question6】
半径がr、中心角がθの扇型の面積はいくらでしょう。

【解説】
ちなみに、度数法を使った場合、中心角をTとすると、

$$（弧の長さ）=（直径）\times（円周率）\times \frac{中心角}{360} = 2r \times \pi \times \frac{T}{360} = \frac{2r\pi T}{360}$$

$$（扇型の面積）=（半径）\times（半径）\times (円周率) \times \frac{中心角}{360^\circ} = \frac{r^2\pi T}{360}$$

しかし、弧度法を使うと、弧の長さは、そもそも$\theta =$（弧の長さ）$\div$（半径）なので、

（弧の長さ）＝（半径）× $\theta = r\theta$

また、面積は、

$$(\text{扇型の面積}) = (\text{半径}) \times (\text{半径}) \times (\text{円周率}) \times \frac{\text{中心角}}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$$

となります。余談ですが、弧の長さを l とすると、扇型の面積 S は $S = \frac{rl}{2}$ と表すこともできますね。

他にも、数学の色んな場面で弧度法を使ったほうが角度の扱いがシンプルになります。特に威力を発揮するのが、三角関数を微積分するときです。

＜弧度法とオイラーの公式＞

さて、いよいよ今回の講座の一番大事なところ、なぜ円周率がオイラーの等式に出てくるか、ということです。もう一度オイラーの公式を見てみましょう。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

この公式は、θ についての恒等式だ、という話を前回しました。つまりここでの θ は、普通の式の x と似たようなものだと考えていい、ということですが、ここでわざわざ θ という記号を使っているのは、主に角度の値を入れたいからです。そこで、この θ に π、つまり 180 度を代入してみましょう。そうすると、こういう式になります。

$$e^{i\pi} = \underline{\cos\pi + i\sin\pi}$$

この下線部分を計算すると、-1 となり、

$$e^{i\pi} = -1$$

となります。つまり、「オイラーの等式」というのは、「オイラーの公式」に $\theta = \pi$、つまり 180 度を代入した式、ということです。

なぜ下線部を計算すると -1 になるのか、という話は次回、三角関数のところでやっていきます。

＜まとめ＞

・　弧度法とは、「半径」と「弧の長さ」の比の値を利用して角度を表現する方法である。（θ＝弧の長さ÷半径）（ ex 360度=2 π ）

・　弧度法を用いた角度の単位は「ラジアン」であるが、これは無次元量である。

・　弧度法を用いると、様々な式がシンプルに表現される。

・　オイラーの等式に現れるπは、角度を表すπであり、オイラーの公式に$\theta = \pi$(180度) を代入した式がオイラーの等式である。