おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第６回授業内容＞

§２　オイラーの公式の登場人物

１）　円周率

２）　三角比、三角関数

（１）　三角比

（２）　三角比の特徴

（３）　三角比から三角関数へ

３）　虚数、複素数

４）　指数、対数

---

§２　オイラーの公式の登場人物

前回は円周率 π と、それを利用した角度の表現方法である弧度法を学習しました。そして、「オイラーの公式」に $\theta=\pi$（180 度）を代入すると、

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$e^{i\pi}=\underline{\cos\pi+i\sin\pi}$$

となり、この下線部を計算すると –1 になるので、

$$e^{i\pi}=-1$$

つまり、「オイラーの等式」になる、ということもご説明しました。

今回は、オイラーの公式の登場人物その２、三角比、三角関数について、です。なぜ先ほどの式の下線部を計算したら –1 になるのか、という話もこ

こでやっていきたいと思います。

2.2　三角比、三角関数

2.2.1　三角比

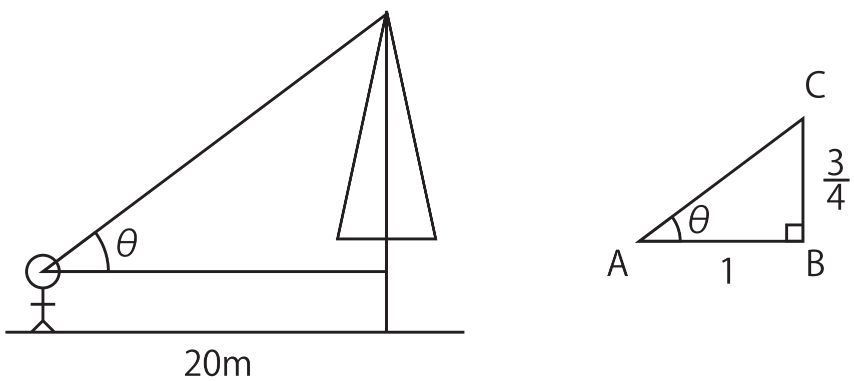
＜三角比とはなにか＞

三角比や三角関数というのは、早い話が sin や cos のことですが、この範囲は数学が「分からない」と思うようになる人が多いところでもあります。しかし正直なところ、見た目に惑わされすぎているのではないか、と思うこともあります。三角比の根本的な発想は、実はそれほど難しくありません。

例えば、次の問題を解いてみてください。

【Question1】

20m 離れた木の頂点を見上げ、仰角を測りました。この角度と同じ角を持つ直角三角形 ABC を描いたところ、$AB : BC = 1 : \frac{3}{4}$ となりました。この木の高さは何 m でしょう。ただし、観測者の目の高さは 1.5m とします。



【解説】

それほど難しくはないでしょう。場合によっては、小学校でやった記憶のある方もいらっしゃるかもしれません。

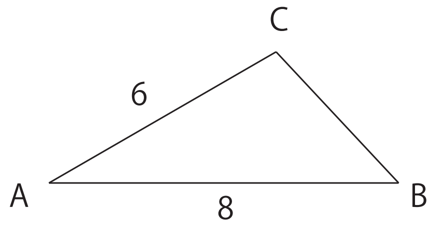
観測者の目の位置を D、木の根本から 1.5m の点を E、木の頂点を F とすると、この 3 点を結んで出来る直角三角形 DEF は、三角形 ABC と相似です。BC が AB の $\frac{3}{4}$ 倍ということが分かっているので、同様に、EF も DE の $\frac{3}{4}$ となり、EF は 15m（$= 20 \times \frac{3}{4}$）と分かります。木の高さはそれに 1.5m を加えた 16.5m です。

この問題が解けた人は、三角比の基本の部分はしっかり使いこなせています、というと驚きますか。

もう一問いきましょう。次は少し難しいかもしれません。

【Question2】

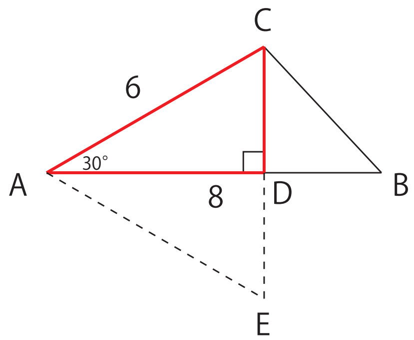
図のような三角形 ABC において、AB=8、AC=6、角 BAC=30 度のとき、三角形 ABC の面積はいくらになるでしょう。



【解説】

かつては中学入試でよく出ていた問題です。(古典的な問題なので、最近はあまり見かけなくなった気もしますが。)

この問題は、少し工夫が必要です。三角形の面積は、底辺 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{2}$ で求められますが、この問題では「高さ」がわかっていません。そこで、図のように頂点 C から AB に向かって垂直な線を引いてみましょう。その線と、AB との交点を D とします。



そうすると、三角形 ADC はある見慣れた三角形になります。この三角形 ADC の反対側に同じ三角形をくっつけると、三角形 AEC は正三角形になるのです。(つまり、三角形 ADC は正三角形の半分の形、三角定規の形ですね。)

ということは、AC と CE は同じ長さになるので、CE の長さも 6。D は CE の真ん中の点なので DC の長さが 3 とわかります。これで、この三角形の高さがわかったので、面積は $8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 12$ と計算できます。

この問題も、やはり三角比を使っています。先ほどの問題と、共通している発想はどこかな、と考えると、いずれの問題も「直角三角形の辺の長さの比」を利用しているのがわかりますか。問題 1 はズバリそのまま辺の長

さの比が与えられていましたし、問題2では隠されていた$AC : CD = 2 : 1$という情報がカギになりました。

この、「直角三角形の辺の長さの比」を利用する、というのが実は三角比の根っこにある発想です。

直角三角形はその名の通り、3つの角のうちの1つが直角なので、残った2つの角度のうち1つの角度を決めると最後に残った角度も決まります。三角形は3つの角度が決まると形が決まり、同時に、辺同士の長さの比も決まります。つまり、直角三角形は「直角以外の一つの角度を決めると、辺同士の長さの比がきまる」ということができます。

一つの値を決めると、他の一つの値が決まる。こういう数値同士の関係を、関数、というのでしたね。つまり三角比とは、「角度」と「辺の比の値」の関数だ、と言うことができます。sinやcos、tanというのは、聞き慣れていない単語なので、難しそうにも見えますが、実際には単純に、どことどこの辺の長さの比にどういう名前をつけたか、という話です。細かくは後で見ていきますが、最初の問題なら、$\tan\theta = \frac{3}{4}$、2問目の問題なら$\sin 30^\circ = 12$と表すことができます。ですので、先ほどお伝えしたとおり、問題1や2を理解できたのであれば、三角比の入り口のところは十分理解できているというわけです。

＜三角比の定義＞

それでは実際に、どことどこの辺の比にどういう名前がついているか、ということについてご説明していきましょう。要するに、sinというのはどことどこの比か、cosというのがどことどこの比か、という話です。

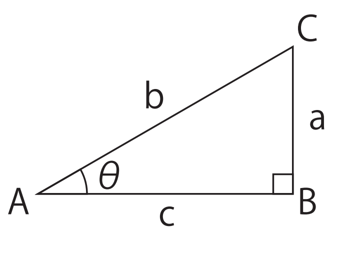
右のような直角三角形ABCがあり、それぞれの辺の長さが$BC = a, AC = b, AB = c$とすると、

正弦（せいげん）　:　$\sin\theta = \frac{a}{b}$

余弦（よげん）　:　$\cos\theta = \frac{c}{b}$

正接（せいせつ）　:　$\tan\theta = \frac{a}{c}$

（以上より、$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$になる、ということも確認しておいて下さい。$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\frac{a}{b}\times b}{\frac{c}{b}\times b} = \frac{a}{c}$）



と表されます。たとえばθを 30°にすると
、aの長さがbの長さの半分になるので、これを$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$と表すのです。

また、上記の式を変形すると、

$a = b \times \sin\theta$

$c = b \times \cos\theta$

$a = c \times \tan\theta$

となります。この形は辺の長さを中心に見たいときに役に立つので、それぞれ本当にそうなるのか確認しておいて下さい。

ちなみに、三角比は「三角形の辺の3つのうちの2つの比」なので、「どの辺とどの辺の比」というふうに見ると、その組合せは3パターンで、高校で習うのもちょうど上記の3つです。しかし「比」は「どの辺の長さがどの辺の長さの何倍か」を考えるので、よくよく考えると、「AはBの何倍か」と「BはAの何倍か」は別の「比」ということになります。そうすると、本来は全部で6つの「三角比」がなければいけないはずです。それでは残り3つの三角比はどこに行ったのか、というと、以下のようなものがあります。

正割（せいかつ） : $\sec\theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\cos\theta}$: セカント

余割（よかつ） : $\csc\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sin\theta}$: コセカント

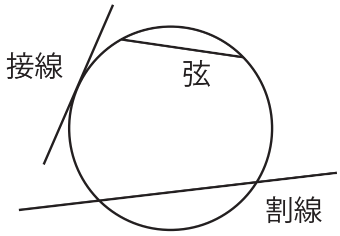
余接（よせつ） : $\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\tan\theta}$: コタンジェント

見ての通り、これらは最初に挙げた3つの逆数になっています。

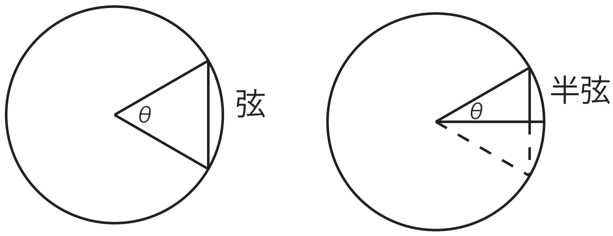
さて、sinやcosは結局名前だ、という話でしたが、逆に言うと、どことどこの辺の比にどういう名前がついているか、ということは覚えなければなりません。慣れていないうちはそこが難しい、という話でもあります。最終的には使い慣れて定着させてもらうしかないのですが、せっかくなので歴史的な経緯をここでお話しておきましょう。

今でこそこのsinやcosは「三角比（三角関数）」とよばれていますが、そもそも最初は三角形ではなく、円についての概念だったのです。（三角比が、三角形の辺の比として改めて整理されるようになったのは、16世紀のドイツです。）三角比の日本語での名前、「正弦」などにその名残があります。

「弦」というのはそのまま「弦」のことですし、「接」というのは「接線」のことです。また、正割・余割の「割」というのは「割線」の「割」です。割線というのは、文字通り円を“割る”線、つまり、円と2点で交わる直線のことです。弦と割線はよく似ていますが、弦の両端が円周上の点であるのに対し、割線の両端は特に決まっていません。

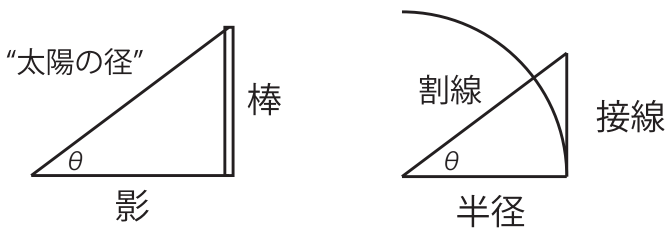


三角比の発想の源流は、古代ギリシャまでさかのぼります。2世紀頃、ギリシャの天文学者（数学者でもあった）プトレマイオスは、天体観測に利用するため、それぞれの角度に対する弦の長さの表を作りました。



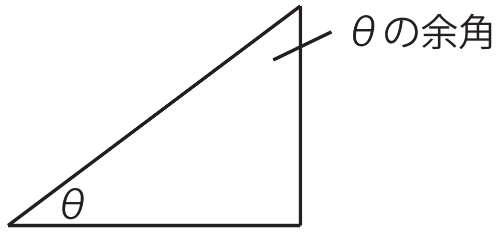
この概念がインドに入って5世紀頃、利便性の観点から、弦の半分（半弦）だけの長さを考えるようになります。これがいわゆるsin です。

さらに時代が進んだ10世紀のアラビアでは、地面と垂直に立てた棒の影の長さを用いて、太陽の高度を測りました。この影の長さと棒の長さの比がtanもしくはcot ですね。（ちなみに、影の長さと“太陽の径”の長さの比がsec です。）



sine（正弦）に対してcosine（余弦）、tangent（正接）に対してcotangent（余接）、secant（正割）に対してcosecant（余割）は、当然関連のない概念ではありません。それぞれの頭についているco-というのは、complementary（補完的な）という意味で、ここでは「余角の」という意味を表しています。

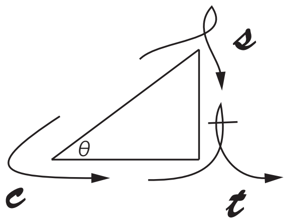
つまり、余弦というのは「余角の弦」、余接というのは「余角の接線」ということです。余角というのは「和が90度になる角度」のことで、直角三角形でいうと、直角以外の2つの角が、それぞれ余角の関係にあります。（余談ですが、和が180度になる角の関係を「補角」といいます。）



三角比は、天体観測や測量で大きな力を発揮しますが、その中でも「三角比の表」が重要な役割を果たします。つまり、$\sin 1^\circ$がいくら、$\sin 2^\circ$がいくら……と書いてある表を作っておくことで、あとは角度を測るだけで長さを計算できるようにしておくのです。

さて、以上がそれぞれの三角比の背景ですが、どうしても覚えられない、という人のために、次のような覚え方も紹介しておきましょう。

アルファベットの筆記体の、小文字のs、c、tの形はご存知でしょうか。それぞれ、sin、cos、tan の頭文字です。これを直角三角形の形に沿って書いてみましょう。

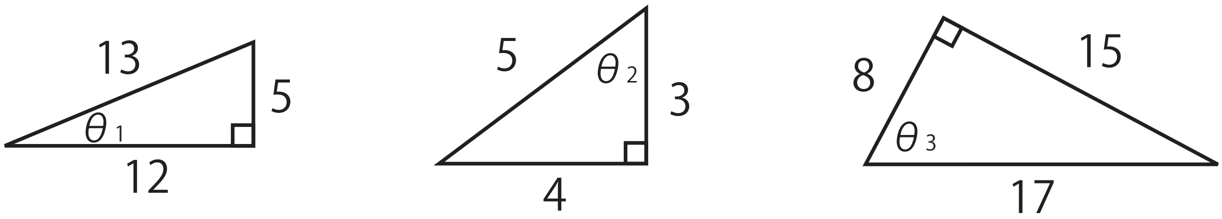


そうすると、その書いた線が沿っていた辺を、順に分母、分子とすればちょうどそれぞれの三角比になっています。とにかく明日のテストまでに覚えなければいけない！という高校生であればこういう覚え方も有効ですが、まあ当然これはたまたまなので、深い意味はありません。

それでは、具体的な三角比をいくつか考えることで、三角比を使い慣れる練習です。

【Question 3】

以下の三角比をそれぞれ求めて下さい。



$\sin\theta_1 =$ $\qquad\cos\theta_1 =$ $\qquad\tan\theta_1 =$

$\sin\theta_2 =$ $\qquad\cos\theta_2 =$ $\qquad\tan\theta_2 =$

$\sin\theta_3 =$ $\qquad\cos\theta_3 =$ $\qquad\tan\theta_3 =$

【解説】

見た目の位置関係ではなく、注目している角度θに対する位置関係で考えて下さい。頭のなかで考えづらければ、θと直角の位置が定義の図の位置通りになるように、自分で図を書きなおして考えてください。

答えはそれぞれ、

$\sin\theta_1 = \frac{5}{13} \quad \cos\theta_1 = \frac{12}{13} \quad \tan\theta_1 = \frac{5}{12}$

$\sin\theta_2 = \frac{4}{5} \quad \cos\theta_2 = \frac{3}{5} \quad \tan\theta_2 = \frac{4}{3}$

$\sin\theta_3 = \frac{15}{17} \quad \cos\theta_3 = \frac{8}{17} \quad \tan\theta_3 = \frac{15}{8}$

です。

もう一問いきます。角度の表記は、度数法だけでなく弧度法にも慣れておきましょう。

【Question 4】

以下の三角比の、具体的な値をそれぞれ求めて下さい。

$\sin 30^\circ =$ $\qquad\cos 30^\circ =$ $\qquad\tan 30^\circ =$

$\sin 45^\circ =$ $\qquad\cos 45^\circ =$ $\qquad\tan 45^\circ =$

$\sin 60^\circ =$ $\qquad\cos 60^\circ =$ $\qquad\tan 60^\circ =$

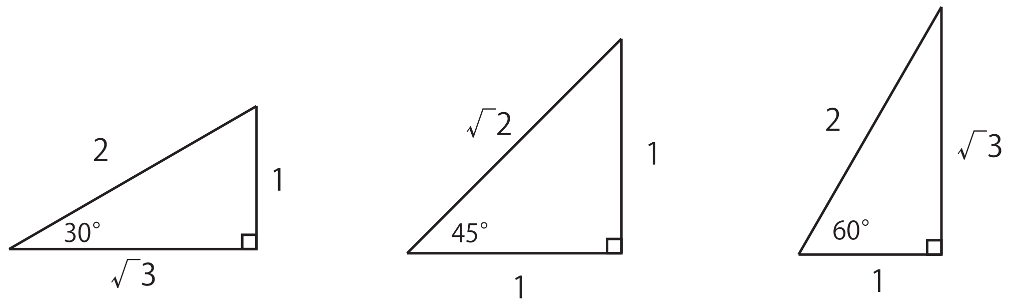
$\sin\dfrac{\pi}{6} =$ $\qquad\cos\dfrac{\pi}{6} =$ $\qquad\tan\dfrac{\pi}{6} =$

$\sin\dfrac{\pi}{4} =$ 　　　　$\cos\dfrac{\pi}{4} =$ 　　　　$\tan\dfrac{\pi}{4} =$

$\sin\dfrac{\pi}{3} =$ 　　　　$\cos\dfrac{\pi}{3} =$ 　　　　$\tan\dfrac{\pi}{3} =$

【解説】

それぞれの直角三角形を、ぜひ自分で書いてみてください。



θが 30°や 60°の三角形は正三角形の半分、45°の三角形は正方形の半分です。それぞれ、三角定規の形であり、特別な形なので、覚えておくとよいでしょう。

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

＜まとめ＞

・　直角三角形において、直角以外の角度と、辺の長さの比は、関数になっている。

・　それをとらえたものが「三角比（三角関数）」である。

・　三角比は、「どこの辺を基準に、どの辺を考えた比か」に応じて、sin や cos などの名前が与えられている。

・　三角比は主に天体観測や測量技術に利用されてきた。

(2) 三角比の性質

それでは、三角比の重要な性質を順に見て行きましょう。（この項での角度は、基本的に鋭角、つまり 90° より小さい角度で考えるものとします。）

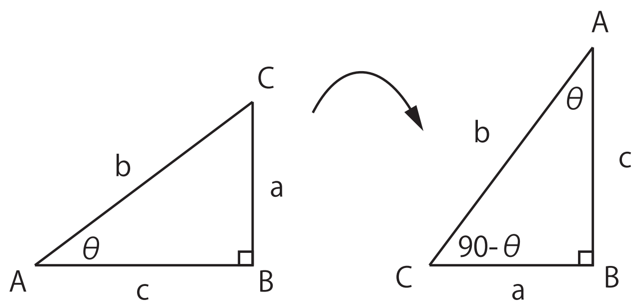
＜余角と三角比＞

まずは、余角の三角比からです。

【Question 5】
以下の三角比を、それぞれ $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ を用いて表して下さい。

$\sin(90^\circ - \theta) =$
$\cos(90^\circ - \theta) =$
$\tan(90^\circ - \theta) =$

【解説】
わからなくなったら、自分で図を書いてみるのが一番です。



図より、$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{c}{b}$、$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{a}{b}$、$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{c}{a}$ とわかります。$\sin\theta = \frac{a}{b}$、$\cos\theta = \frac{c}{b}$、$\tan\theta = \frac{a}{c}$ なので、それぞれ

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

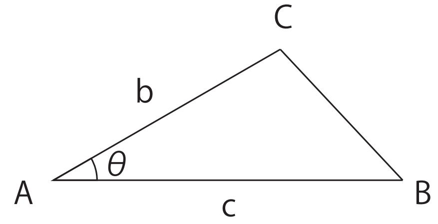
と表すことができます。そもそも cos（余弦）は、「余角の弦」のことでしたので、言葉の意味通りの結果になりましたね。

＜三角比と三角形の面積＞

次は、三角比を利用して、三角形の面積の公式を拡張してみましょう。

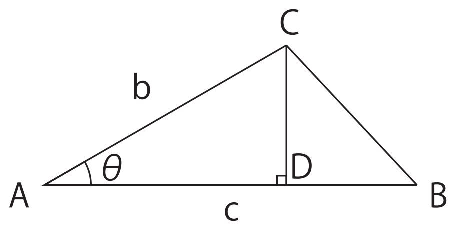
【Question 6】

図の三角形 ABC の面積 S を、$b, c, \sin\theta$を用いて表して下さい。



【解説】

三角形の面積は、「底辺 × 高さ ÷ 2」ですね。ここで底辺の長さは c だと分かっているので、それに対する高さがわかれば、面積を求めることができます。そこで、以下の図のように、頂点 C から AB に垂直な線を引いてみましょう。AB との交点を D とすると、CD の長さが高さということになります。

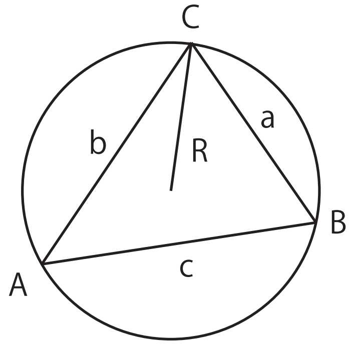


そうすると、$\frac{CD}{b} = \sin\theta$なので、$CD = b \times \sin\theta$ になります。よって、三角形の面積は、$S = c \times CD \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\theta$ と表すことができます。

＜正弦定理＞

次に正弦定理です。正弦、つまり、sin に関する定理です。一般的に、三角形の辺と角には次のような関係があります。

三角形 ABC において、外接円の半径を R とすると、

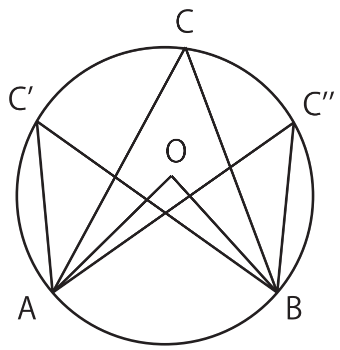


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成立する。

証明の方法はいくつかありますが、ここでは代表的なものをひとつ紹介しておきましょう。証明の前にひとつ知っておく必要のある定理があります。

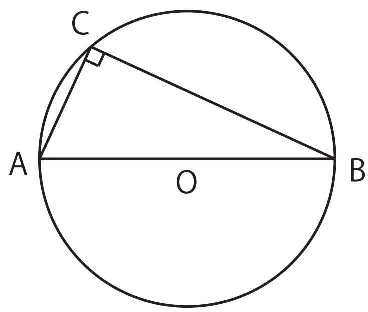
・円周角の定理



弧 AB に対する円周角は常に一定であり、その大きさは中心角の半分である。

つまり、円周上の弧 AB をとり、その弧以外の円周上に点 C を取ると、C の位置にかかわらず、角 ACB が常に一定になる、ということです。そして、その大きさは中心角の半分である、と。（図で、角 $ACB =$ 角 $AC'B =$ 角 $AC''B = \frac{1}{2}$角 AOB）

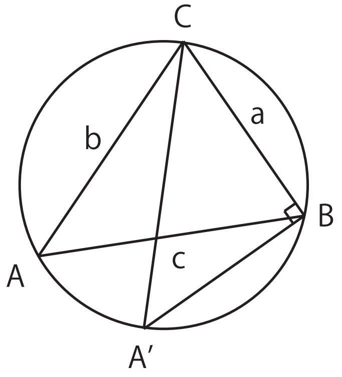
もちろん、この定理にも証明はありますが、ここでは省略します。

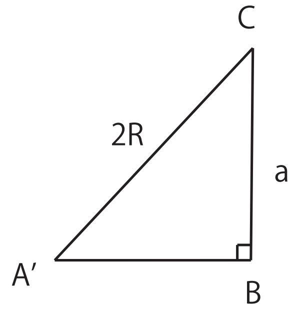


この定理を利用すると、円の直径を 1 辺として、その円に内接する三角形は直角三角形である、ということもできます。なぜなら、角 ACB を、弧 AB（半円）の円周角として見てやると、大きさが中心角（角 AOB）の半分になるからです。角 AOB の大きさは 180 度なので、角 ACB は 90 度となります。

それでは正弦定理の証明です。

A と B と C は対等なので、$\frac{a}{\sin A} = 2R$ が証明できれば十分です。



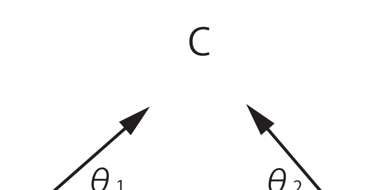


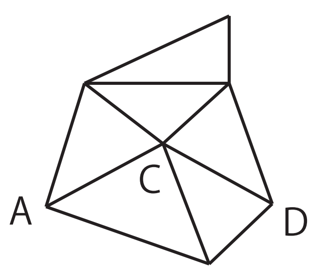
まず、点Cから円の中心を通る直線（直径）を引き、円周との交点をA'とします。そうすると、円周角の定理により角A（角CAB）＝角A'（角$CA'B$）となり、当然$\sin A = \sin A'$となります。

ここで三角形A'BCに注目すると、A'Cが直径なので、この三角形は角Bが直角の直角三角形となっています。この三角形を取り出して三角比を考えると、$\sin A' = \frac{BC}{A'C} = \frac{a}{2R}$なので、これを変形して$\frac{a}{\sin A'} = 2R$、よって先ほどの$\sin A = \sin A'$とあわせて$\frac{a}{\sin A} = 2R$が証明されたことになります。

（本来であれば、それぞれの角が直角（90度）や鈍角（90度より大きい角）のときも証明する必要がありますが、この項の最初に説明したとおり、今のところ、鋭角（90度より小さい角度）の場合のみ考えることにしています。）

この定理は、単に「数学の定理」として提示されるといまいちピンときませんが、この定理は測量技術に応用することができます。この定理は、言ってみれば、「2点間の距離と、それぞれの点から3点目への角度がわかれば、距離がわかる」という定理です。



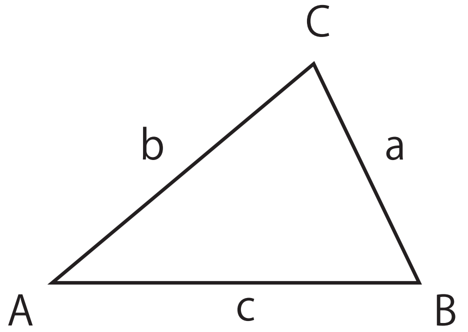


図のように、AB間の長さxと、A、Bから見たCの角度θ_1、θ_2がそれぞれ測定できたとします。そうすると、三角形の内角の和は180度なので、角ACBの大きさは計算できます。先ほどの正弦定理を用いると、この値とxの長さ

から三角形 ABC の外接円の直径（$2R$）の長さを計算することができるので、その値をさらに利用して、$\sin\theta_1$ や $\sin\theta_2$ から、AC 間、BC 間の長さを計算することができます。BC 間の長さが計算できれば、今度は新しく点 D を適当にとり、三角形 BCD に対して今と同じことをすると、BD、CD の長さも計算できます。そうしてこの作業を繰り返していくと、さまざまな地点間の距離を測量していくことができるのです。

＜余弦定理＞

それでは次に、余弦定理です。今度は余弦、つまり cos に関する定理です。



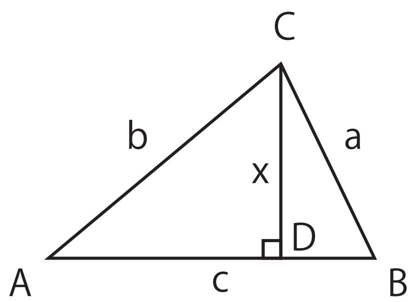
三角形 ABC において、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$(b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B)$$
$$(c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C)$$

が成立する。

こちらの証明は、少し計算が面倒なくらいで、中身はそれほど難しくはありません。

c から AB に垂線を引き、あとはピタゴラスの定理（三平方の定理）に当てはめていきます。



$AD = b\cos A$ なので、

$$b^2 = x^2 + (b\cos A)^2$$
$$a^2 = x^2 + (c - b\cos A)^2$$

よって、1 つ目の式から 2 つ目の式を引くと、

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= (b\cos A)^2 - (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\cos^2 A - c^2 + 2bc\cos A - b^2\cos^2 A \\ &= -c^2 + 2bc\cos A \end{aligned}$$

この式を変形すると、$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ となります。（$(\cos A)^2$は、$\cos A^2$ではなく $\cos^2 A$ と表記します。前者だと、「2 乗」というのが A だけにかかっているようにも見えるからです。）

この定理は、ピタゴラスの定理を拡張したものと捉えることもできます。ピタゴラスの定理は、角Bが直角のとき $b^2 = a^2 + c^2$ でした。そこで、角Bが直角ではない分、$-2ac\cos B$ だけ調整すればいいよ、と考えるのです。

＜加法定理＞

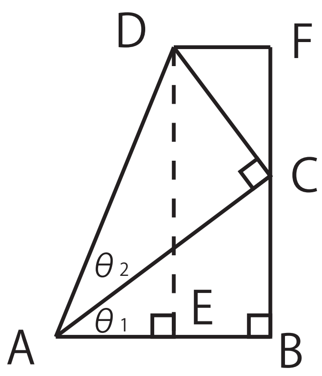
最後に加法定理です。これはおそらく三角比に関する定理の中で、一番重要な定理かもしれません。

【Question 7】

以下の三角比を、それぞれ、$\sin\theta_1$、$\cos\theta_1$、$\tan\theta_1$、$\sin\theta_2$、$\cos\theta_2$、$\tan\theta_2$を使って表して下さい。

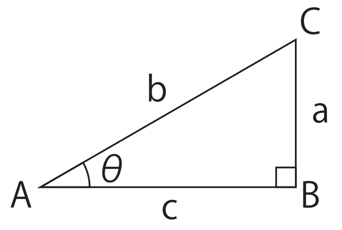
$\sin(\theta_1 + \theta_2) =$
$\cos(\theta_1 + \theta_2) =$
$\tan(\theta_1 + \theta_2) =$

【解説】



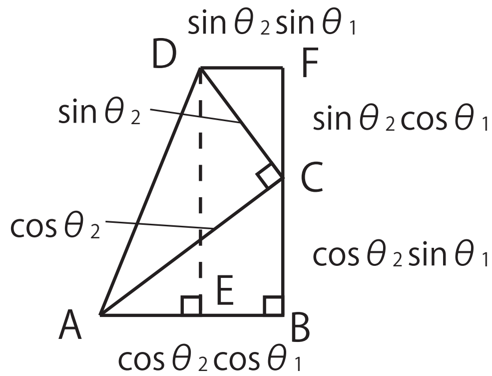
ひとまず、$(\theta_1 + \theta_2)$ という角度を作り出したいので、図のように、θ_1の大きさの角を持つ直角三角形ABCとθ_2の大きさの角を持つ直角三角形ACDを、積み重ねた図を考えてみます。こうすると、角BADの大きさが$(\theta_1 + \theta_2)$となるので、問題の3つの三角比は、直角三角形AEDの辺の長さの比を考えればいい、ということになります。（$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{DE}{AD}$、$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{AE}{AD}$、$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{DE}{AE}$ということですね。）

ここで、$AD = 1$とすると、$AC = \cos\theta_2$となり、$CB = \cos\theta_2 \sin\theta_1 AB = \cos\theta_2 \cos\theta_1$となります。



（　※　三角比の定義のところでも書いたように、$\sin\theta=\frac{a}{b}$ということは$a=b\times\sin\theta$であり、$\cos\theta=\frac{c}{b}$ということは$c=b\times\cos\theta$ということです。）

また、D から AB と平行な線を引き、BC の延長線との交点を F とすると、三角形 CFD は直角三角形になりますが、この角 DCF の大きさはθ_1です。（角 $ACB=90^\circ-\theta_1$なので。）　そうすると、$DC=\sin\theta_2$より $DF=\sin\theta_2\sin\theta_1$、$CF=\sin\theta_2\cos\theta_1$です。



よって、

$DE(=FB)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$、

$AE=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$より、

$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\frac{DE}{AD}=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{AE}{AD}=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$

となります。$\tan(\theta_1+\theta_2)$ は、$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_1+\theta_2)}$なので、

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_1+\theta_2)}=\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2}=\frac{\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}}{\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}}=\frac{\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}+\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}}{1-\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}}=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

となります。それでは、この加法定理を実際に使う練習をしてみましょう。

【Question 8】

以下の三角比の、具体的な値をそれぞれ求めて下さい。

$\sin 75^\circ=$　　　　$\cos 75^\circ=$　　　　$\tan 75^\circ=$

$\sin\dfrac{3\pi}{8}=$　　　　$\cos\dfrac{3\pi}{8}=$　　　　$\tan\dfrac{3\pi}{8}=$

【解説】

$75^\circ=45^\circ+30^\circ$として、先ほどの加法定理にあてはめていきます。$45^\circ$、$30^\circ$のそれぞれの三角比の具体的な値は、問題4をもう一度参照して下さい。（もしくは、もう一度自分で図を書いて確認すると、定着率もあがるのでおすすめです。）

$$\sin 75^\circ (= \sin \frac{3\pi}{8})$$
$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 75^\circ (= \cos \frac{3\pi}{8})$$
$$= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan 75^\circ (= \tan \frac{3\pi}{8})$$
$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}} \times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

（ ※ $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$は、計算方法は省略しますが、簡単にすると$2+\sqrt{3}$になり、これは$\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$を簡単にした値と同じです。）

【Question 9】

以下の三角比を、それぞれ、$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$を使って表して下さい。

$\sin 2\theta =$
$\cos 2\theta =$
$\tan 2\theta =$

【解説】

今度は$2\theta=\theta+\theta$として、先ほどの加法定理に代入します。そうすると、それぞれ

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

となります。ちなみにこれらの式には「倍角公式」という名前もついており、高校では覚えさせられる場合もあります。しかし、加法定理だけ覚えておけば、そこから導くことができるのは上記のとおりです。加法定理を上手く利用すれば、「三倍角の公式（3θ）」「半角公式 $(\frac{\theta}{2})$」などを導くこともできます。

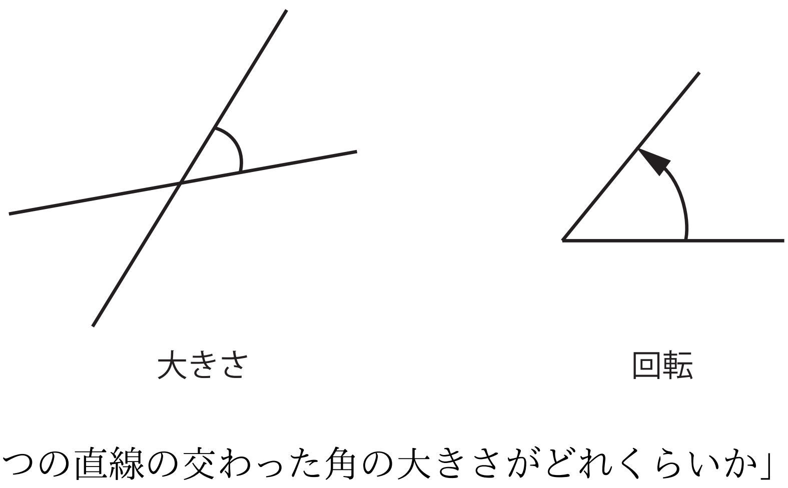
また、余裕のある人は、$\sin(\theta_1-\theta_2)$、$\cos(\theta_1-\theta_2)$、$\tan(\theta_1-\theta_2)$ の値も考えてみてください。（たし算のときと同じように、図を書いて考えます。）

(3) 三角比から三角関数へ

＜一般角への拡張＞

それではここから、「三角比」を「三角関数」へと拡張していきます。三角比は先ほど、直角三角形の辺の長さの比で定義しました。しかし、その考え方だと、$0(0度) < \theta < \frac{\pi}{2}(90度)$ の範囲でしか考えられません。しかし、今まで見てきたとおり、三角比は直角三角形だけに利用されるものではないので、それ以外の角度でも考える必要があります（正弦定理、余弦定理、三角形の面積など）。

そこで、三角比の概念を拡張していこうと思うのですが、その前の段階として、「一般角」という概念を導入します。一般角とは、「一般的な角」のことです。角度の捉え方を、「大きさ」から「回転」に変えるのです。



つまり、「2つの直線の交わった角の大きさがどれくらいか」と捉えるので

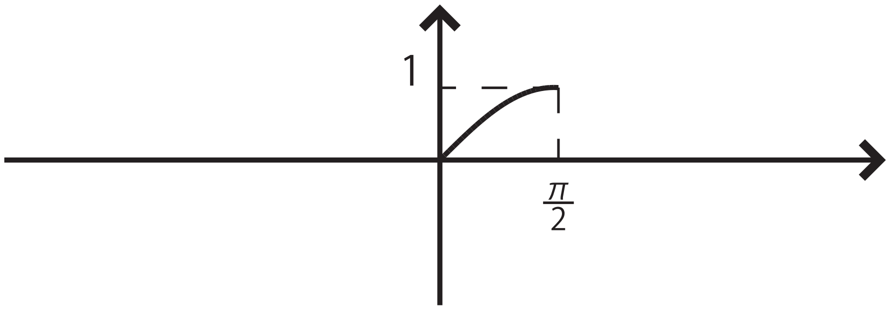
はなく、「基準の線に対してもう一方の線がどれくらい回転したか」を捉えるのです。そうすると、90 度以上の角度だけではなく、360 度以上の角度や、さらには負の角度なども考えることができます。（たとえば、540°は 1 周 + 180°のことですし、弧度法を使った場合は 3π が 1 周 + π と同じ、ということになります。また、反時計回りの回転が“正の角度”なので、負の角度は時計回りの角度のことを指します。）

三角比の概念を 90 度以上の角や負の角に拡張していくとき、今まで成立してきた三角関数の特徴や定理（加法定理など）が成立するように拡張していく必要があります。それらを踏まえた上で、まずは 90 度以上の角や負の角の三角比の値が、具体的に“いくらになるべきか”をまず考えてみましょう。ここからは角度はなるべく弧度法で表記していきます。

【Question 10】

$y = \sin x$ のグラフを書いて下さい。

（ちなみに、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ までのグラフは、以下のようになっています。）



【解説】

加法定理を上手く使って、それぞれの値を求めていきましょう。以下の値を順に考えていけば、すべての値を決めていくことができます。

・$\sin \frac{\pi}{2}(90^\circ)$

$\frac{\pi}{2}(90^\circ) = \frac{\pi}{6}(30^\circ) + \frac{\pi}{3}(60^\circ)$ なので、

$\sin \frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

（$\frac{\pi}{2}(90^\circ) = \frac{\pi}{4}(45^\circ) \times 2$ として、$\sin \frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right)$ としても同じ結果を得られます。）

・$\sin \pi(180^\circ)$

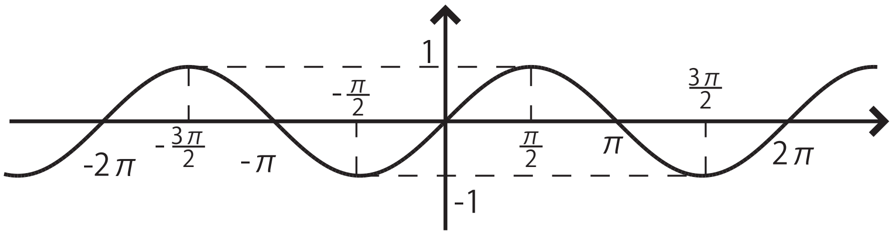
$\pi(180^\circ) = \frac{\pi}{2}(90^\circ) \times 2$ なので、

$\sin\pi = \sin(\frac{\pi}{2}\times 2) = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 2\times 1\times 0 = 0$
（$\cos\frac{\pi}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}\times 2) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$）

・$\sin(-\theta)$
$\sin(-\theta)$ を考えるために、$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$ を考えてみます。
$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}+(-\theta))$ と考えると、加法定理より、
$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}+(-\theta))$
$= \cos\frac{\pi}{2}\cos(-\theta) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(-\theta) = 0\times\cos(-\theta) - 1\times\sin(-\theta) = -\sin(-\theta)$
一方で、$(\frac{\pi}{2}-\theta)$ はθの余角なので、$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$
よって、$-\sin(-\theta) = \sin\theta$、つまり、$\sin(-\theta) = -\sin\theta$とわかります（たとえば、$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$）。これはどういうことかというと、グラフの形は原点を中心に点対称になっている、ということです。

・$\sin 0$
$0 = \theta + (-\theta)$ と考えます。
$\sin 0 = \sin(\theta + (-\theta))$
$= \sin\theta\cos(-\theta) + \cos\theta\sin(-\theta) = \sin\theta\cos(\theta) - \cos\theta\sin\theta = 0$
（$\cos(-\theta)$ は、先ほどと同じように$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ を考えます。）
・$\sin(\pi-\theta)$
$\sin(\pi-\theta) = \sin(\pi+(-\theta))$
$= \sin\pi\cos(-\theta) + \cos\pi\sin(-\theta) = 0\times\cos(-\theta) + (-1)\times(-\sin\theta) = \sin\theta$
（$\cos\pi = \cos(\frac{\pi}{2}\times 2) = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = 0^2 - 1^2 = -1$）
これはつまり、グラフは$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$ を境にして左右対称になっている、ということです。

・$\sin(2\pi+\theta)$
$\sin(2\pi+\theta) = \sin 2\pi\cos\theta + \cos 2\pi\sin\theta = 0\times\cos\theta + 1\times\sin\theta = \sin\theta$
（$\sin 2\pi = 2\sin\pi\cos\pi = 2\times 0\times -1 = 0$
$\cos 2\pi = \cos^2\pi - \sin^2\pi = (-1)^2 - 0^2 = 1$）
これはつまり、$2\pi(360^\circ)$ ごとに同じ値になっている（周期がある）ということです。
以上の結果を踏まえてグラフに表すと、



　というグラフになります。この波の形を「正弦波（サインカーブ）」と呼びますが、振動（波）などと密接な関係があり、物理でよく出てくる単語です。

　次回は、この続きの $y = \cos x$ のグラフを書くところから始めます。