おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第7回授業内容＞

§2　オイラーの公式の登場人物

1）　円周率

2）　三角比、三角関数

（3）　三角比から三角関数へ

3）　虚数、複素数

（1）　虚数の歴史

（2）　複素数の特徴

（3）　複素平面上での複素数の振る舞い

4）　指数、対数

---

§2　オイラーの公式の登場人物

それでは今回は前回に続き、三角比・三角関数の途中からです。

三角比とは、「直角三角形の相似を利用した、角度と辺の長さの比の関数」のことでした。そして、sin や cos というのは、「どことどこの長さの比を表しているか」という名前に過ぎない、というお話もしました（具体的にどことどこの比がなんという名前でよばれているかは、前回の授業内容をご確認下さい）。

そうやって三角比を考えると、正弦定理や余弦定理、加法定理など、さまざまな性質が明らかになりましたが、しかし直角三角形を利用した三角比の概念には限界があるのでした。それは、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}(90^\circ)$ の間の大きさでしか、三角比を考えられない、ということです。正弦定理や余弦定理などを考える上で、$\frac{\pi}{2}$ 以上の大きさの角が考えられないというのはとても不便です。そこで、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 以外の範囲の大きさについても“三角比”を考えていこう、というところまでが前回のお話でした。

2.2　三角比、三角関数

2.2.3　三角比から三角関数へ

＜一般角への拡張＞

そういうわけで、これまで見てきた三角比を、すべての実数を定義域にもつ（つまり、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 以外の範囲でも値を考えられるような）「三角関数」へと拡張していきます。

これは三角関数に限らず、数学一般について言えることですが、既存の概念に限界があり、それを拡張していくとき、いきなり新しい定義を考えるのではなく、まずは「今まで成立してきた特徴がそのまま成立するのなら、どういう値をとるべきなのか」を考えます。例えば、三角比は、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で正弦定理などの様々な定理が成立しました。これを $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 以外の範囲に広げたとき、それらの定理はそのまま成り立ったほうが嬉しいです（もちろん、どう拡張しても矛盾が起きてしまう場合は仕方ありませんが）。そこで、まず一度、それらの定理が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 以外の範囲でも成り立つと仮定し、その場合にどういう値をとるべきかを考えましょう（同時に矛盾が起きないかも考えます）。そして、それが上手くいけば、実際にそういう値になるような新しい定義を考えればよいのです。

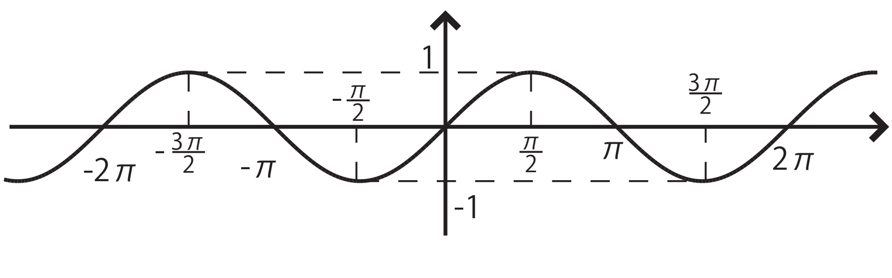
前回は、まず sin がどういう値をとるべきか、というのを考えていきました。

【Question 10】

$y = \sin x$ のグラフを書いて下さい。

【解説】

省略（前回の授業内容を参照して下さい。）

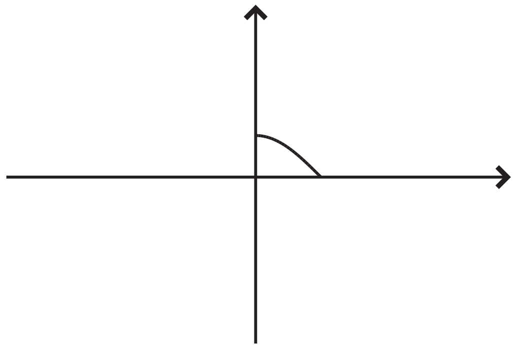


今回は、$\cos$ や $\tan$ のグラフも描いてみましょう。

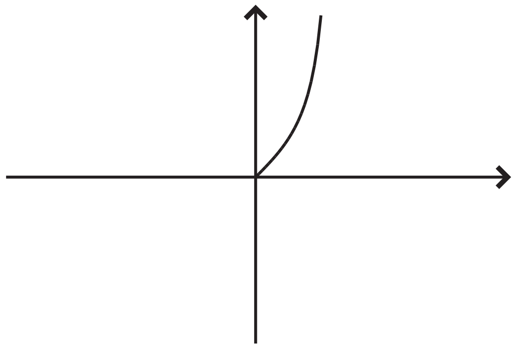
【Question 11】

$y=\cos x$、$y=\tan x$ のグラフを書いて下さい。

※　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$までの値は、それぞれ以下のようになっています。



$y=\cos x$



$y=\tan x$

【解説】

まずは $y=\cos x$ のグラフです。前回の $y=\sin x$ のグラフと同じように考えていきましょう。以下の値を順に見ていけば、グラフを描くことができるでしょう。

・$\cos\frac{\pi}{2}$、$\cos\pi$、$\cos 2\pi$

このあたりは、加法定理（倍角公式）を使えば具体的な値が求まります。

$\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 2\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$

$\cos\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=\cos^2\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\pi}{2}=0^2-1^2=-1$

$\cos 2\pi=\cos(\pi\times 2)=\cos^2\pi-\sin^2\pi=(-1)^2-0^2=1$

・$\cos(-\theta)$

こちらは直接考えるのが難しいので、まず加法定理を使って $\cos(-\theta)$ が出てくる式を作ります。たとえば、$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ を考えると、

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\theta)\right)$

$=\sin\frac{\pi}{2}\cos(-\theta)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-\theta)=1\times\cos(-\theta)+0\times\sin(-\theta)=\cos(-\theta)$

一方で、$\frac{\pi}{2}-\theta$はθの余角なので、$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$です。よって、$\cos(-\theta)=\cos\theta$、つまり、このグラフは$y$軸に関して左右対称である、ということが分かります。

・$\cos 0$

たとえば、$0 = \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})$ というふうに考えましょう。（もちろん、他の値でも大丈夫です。プラスの値とマイナスの値で打ち消し合って 0 を作ります。他の値の場合でも同じ結果になるかどうか、ぜひ確認してみてください。）

$\cos 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})\right)$

$= \cos\frac{\pi}{2}\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 \times 0 - 1 \times (-1) = 1$

・$\cos(\pi - \theta)$

$\cos(\pi - \theta) = \cos(\pi + (-\theta))$

$= \cos\pi\cos(-\theta) - \sin\pi\sin(-\theta) = -1 \times \cos\theta - 0 \times \sin(-\theta) = -\cos\theta$

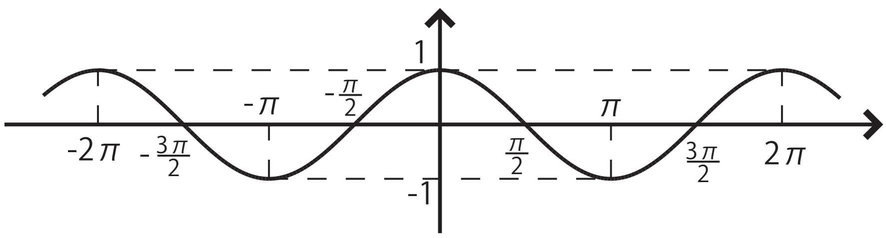
これはつまり、$x = \frac{\pi}{2}(y = 0)$ の点を中心にこのグラフが点対称になっている、と解釈することができます。（実際にいくつか点をプロットして確認してみてください。）

・$\cos(2\pi + \theta)$

$\cos(2\pi + \theta) = \cos 2\pi\cos\theta - \sin 2\pi\sin\theta = 1 \times \cos\theta - 0 \times \sin\theta = \cos\theta$

$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$ということは、もちろん、$\cos(4\pi + \theta) = \cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$です。$2\pi$増えるごとに同じ値になるので、このグラフは周期$2\pi$ごとに繰り返しがおきている、ということが分かります。

以上の結果をすべて踏まえると、



というグラフになります。これが $y = \cos x$ のグラフです。$y = \sin x$ のグラフを左右に少し（具体的には$\frac{\pi}{2}$）ずらした形になっていますね。

それでは次に、$y = \tan x$ です。$\tan$ の値を考えるときは、$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$となることにも注意して下さい。特に、$\theta = \frac{\pi}{2}$のときは、$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$となってしまうので、$\tan\theta$は$\theta = \frac{\pi}{2}$のとき、値を取ることができません。

・$\tan 0$、$\tan\pi$

$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$

・$\tan(-\theta)$

$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

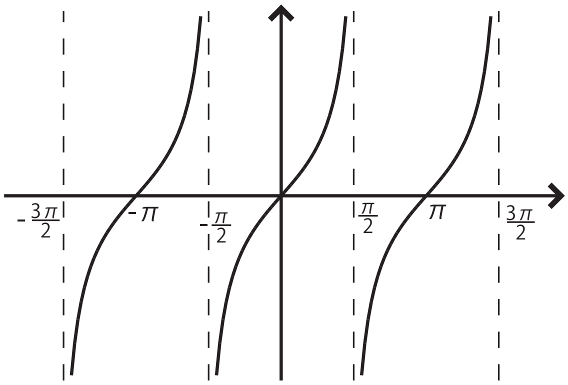
（つまり、このグラフは原点（$x = 0, y = 0$）を中心に点対称ということです。）

・$\tan(\pi + \theta)$

$\tan(\pi + \theta) = \frac{\tan\pi + \tan\theta}{1 - \tan\pi\tan\theta} = \frac{0 + \tan\theta}{1 - 0 \times \tan\theta} = \tan\theta$

（つまり、このグラフは周期πで繰り返します。）

以上より、グラフは、

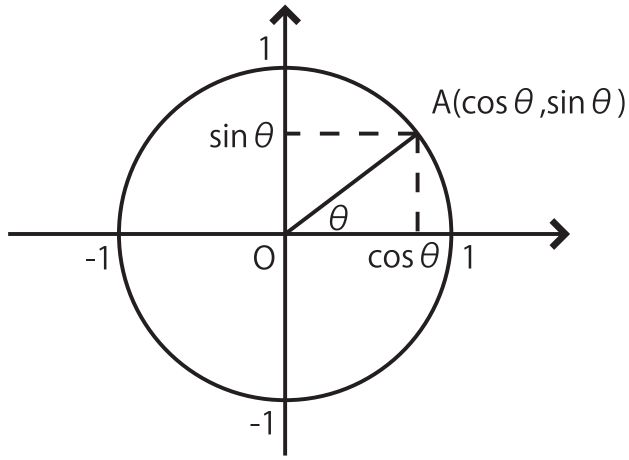


となります。（先ほど書いたように、$\theta = \frac{\pi}{2}$のとき、そして$\theta = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$（$k$は自然数）のとき、このグラフは値をとりません。）

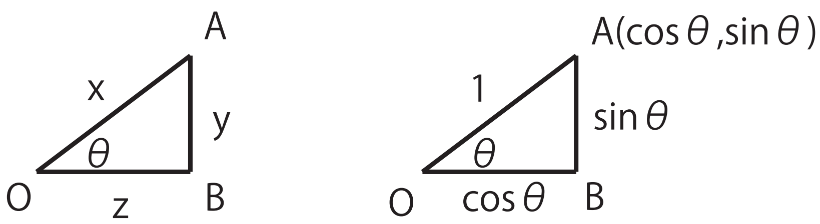
ちなみに、なぜ今挙げたような値を調べていくのか、というところを疑問に思うかもしれません。しかしそれについて言えば、「いろいろな値を調べた結果、これらの値を調べればグラフをかけるということがわかった」ということであり、最初から「この値を調べればいい」とわかっているものではありません。もし自分で考えるときは、使えそうな値を片っ端から調べてみることになるでしょう。

＜三角関数の再定義＞

さて、それでは先ほどの3つのグラフの形になるように、新しい三角関数の定義を導入していきます。ここで三角関数は、直角三角形を利用した概念から、再び円に関係する概念へと戻っていくことになります。



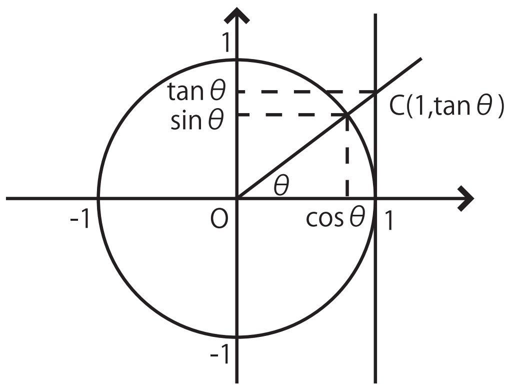
三角関数の新しい定義には、右の図のような座標軸と単位円を利用します。単位円というのは「半径が1の円」のことです。右の図のように、原点を中心とする単位円をまずかきます。角の大きさがθのときの三角関数の値を考えたいとき、その単位円の中心からx軸の正の方向との角度がθになるような直線を引きます。この直線と単位円の交点をAとして、点Aのx座標を$\cos\theta$、y座標を$\sin\theta$の値にするのです。(直角三角形を利用した定義を思い出してもらうと、$\sin\theta = \frac{y}{x}$、$\cos\theta = \frac{z}{x}$、つまり、$y = x\sin\theta$、$z = x\cos\theta$でした。単位円を利用することで、斜辺（x）の長さが常に1となり、$y = \sin\theta$、$z = \cos\theta$とすることができるのです。もちろん、これは$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$での話ですが、これにより以前の直角三角形を利用した定義と、矛盾がないことは確認できます。また、この直角三角形に対して三平方の定理を考えると、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$が成立します。これは三角関数において非常に重要な関係式です。)

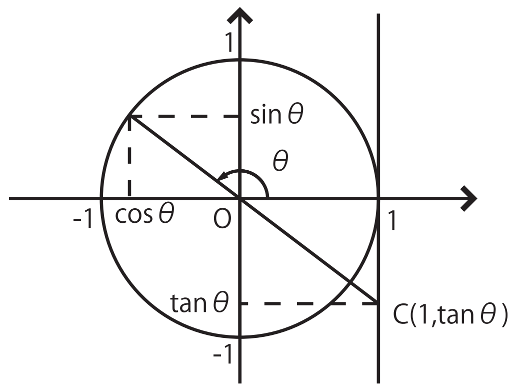


さてここで、θを自分でいろいろ変化させてみてください。新しい概念を理解するとき、自分の手を実際に動かしてみることが大事です。例えば$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$のときに$\cos\theta$の値が負になることや、$\sin\theta$と$\sin(\pi - \theta)$の値が一緒になることなど、先ほど計算で求めた様々な特徴を実際に確認してみてください。

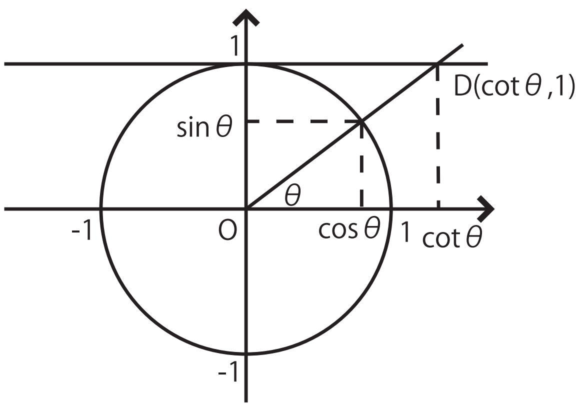
ちなみに$\tan\theta$の値は$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$です。これはつまり、中心から$x$軸と角度$\theta$で引いた直線の「傾き」と一致します。図の上でどう見るか、という話ですが

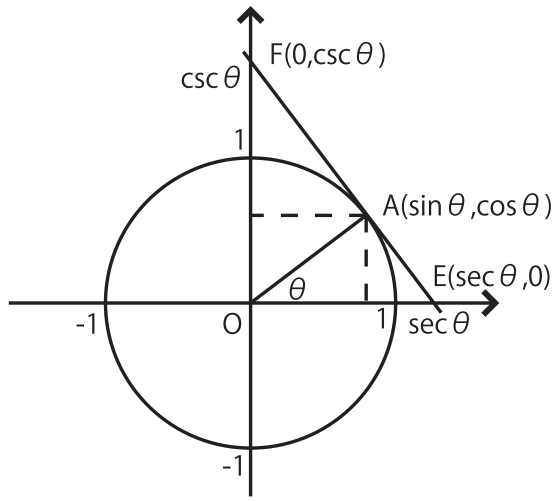
、直線の傾きというのは、xが1増えたときにyがどれだけ変化するか、ということでもあるので、特に原点を通る直線の場合は、$x=1$のときの値が傾きの数値と一致することになります。よって、$\tan\theta$の値は、先ほどの直線を延長したものと$x=1$との交点の、y座標の値として現れることになります。ここで注意していただきたいのは、$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$などのときでも、あくまでも$x=1$との交点のy座標を考える、ということです。（この場合は図のように$\tan\theta$の値は負の値になります。）また、$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき、中心から引いた直線は上にまっすぐ伸びていくので$x=1$と平行になってしまい、交点を持ちません。これは、$\tan\frac{\pi}{2}$は値を持たない、ということを意味しています。





もうひとつ余談ですが、sin、cos、tan 以外の三角関数、すなわち sec、csc、cot についても触れておきましょう。まず、$\cot\theta$は直線OAの延長線と、$y=1$との交点のx座標です。（$\tan\theta$との関係を思い出してください。cot とは“余角の正接（tan）”のことでした。）$\sec\theta$、$\csc\theta$を考えるときは、Aを通る単位円の接線を考えます。この接線とのx軸との交点のx座標が$\sec\theta$、y軸との交点のy座標が$\csc\theta$の値にそれぞれなります。





このとき、実はAEの長さも$\tan\theta$の値になっているように見えますが（実際$0<\theta<\frac{\pi}{2}$の範囲ではそうなっていますが）、「長さ」で$\tan\theta$の値を考

えてしまうと負の値をとることができません。AE の長さが $\tan\theta$ の値と一致する“ こともある ”くらいに考えておくとよいでしょう。

以上により、三角関数は再定義され、すべての実数を変域に持つ関数になることができました（どんな実数 x を入れても y の値を求めることができる、という意味です)。こうやって、既存の概念に限界があるとき、より本質的な概念へと再定義していくのも、数学の面白さのひとつです。学校で習うと気は、単位円を利用した定義も所与のものとして与えられますが、それは“ 数学的な成果を勉強する ”ことではあっても、“ 数学をする ”ことではないと思うのです。

ぜひ、自分の手を動かしてこの「概念の拡張」を追体験し、「数学をする」面白さを感じ取っていただければ、と思います。

ちなみに、三角関数を一般角へ拡張したのもオイラーの業績です。

＜オイラーの等式＞

それでは最後に、三角関数とオイラーの公式の関係を見ていきましょう。

【Question 12】

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に $\theta = \pi$ を代入し、オイラーの等式（$e^{i\pi} = -1$）を導いて下さい。

【解説】

オイラーの公式に、$\theta = \pi$ を代入すると、

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

という形になります。ここで、$\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ でしたので、

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\ &= -1 + i \times 0 = -1 \end{aligned}$$

よって、$e^{i\pi} = -1$ という等式が完成しました。つまり、各所で美しいと絶賛されるこのオイラーの等式は、オイラーの公式に $\theta = \pi$ を代入した式

だ、ということです。

ここから先は、オイラーの公式への理解を深めていくことにしましょう。

＜まとめ＞

・　直角三角形の角度を用いた考え方では、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$の範囲の大きさの角しか 考えられない。

・　それ以外の角度での三角比を考えるため、一般角という概念を導入する。すなわち、角度を大きさではなく回転として捉えるようにする。これにより、2π以上の大きさの角度や負の角度を考えることができる。

・　三角比の概念を拡張し、再定義したことにより、三角関数はすべての実数を定義域とする関数として扱うことができるようになった。

2.3　虚数、複素数

オイラーの公式の登場人物の紹介、3 人目は i、つまり虚数や複素数についてのお話です。第 1 章で、我々が普段目にしている「実数」の世界より外にも数の世界が拡がっており、そこに存在する数が虚数、そしてその虚数と実数をあわせて複素数とよぶのだ、というお話をしました。この項では、そこをもう少し掘り下げて解説していきます。

2.3.1　虚数の歴史

第 1 章で見てきたように、人類は長い歴史の中で、必要に応じて様々な数の概念を獲得していきました。なにもないことを表すために 0 を、小さい数から大きい数を引く引き算の答えとして負の数を、割り切れない割り算の答えを表す数として有理数を、そして $x^2 = 2$ などの解を表す数として無理数まで考えました。しかしここに至ってまだ、既存の数の概念では解を表現できない方程式がありました。それは例えば、

$$x^2 + 1 = 0$$

という方程式です。これを変形すると $x^2 = -1$ となり、2 乗して -1 にな

る数を求めたい、ということなのですが、この方程式の解は $x = 1$ ではありません。$x = 1$ のとき、当然 $x^2 = 1$ です。それでは、$x = -1$ ではどうでしょうか。$x = -1$ のときも、$x^2 = 1$ になってしまいます。そもそも、正の数の 2 乗は正であり、負の数の 2 乗も正になります。2 乗して負になる数、というのは、今のところ思い当たるものがありません。そこで昔の人は、ひとまずこの方程式については「解なし」ということにしておきました（今でも、中学までの数学ではそういうふうに扱いますね）。負の数を知らなかった昔の人が、$4x + 20 = 0$ という方程式を、馬鹿げている、考えても意味がない、と思っていたのと同じです。そういう方程式は考えないようにしておこう、ということになっていたのです。

2 次方程式を解いている間は、それでも特に不都合はなかったようです。しかし、いつまでもそのままそういった方程式を無視し続けるわけには行きませんでした。どうやら「2 乗して負になる数」と向き合わないと先に進めないらしい、というのが分かり始めてきたのが 16 世紀頃です。

1545 年、イタリアの数学者ジェロラモ・カルダノ（Gerolamo Cardano 1501-1576）が、『偉大なる術（アルス・マグナ）』という本を発表しました。

16 世紀にもなると、方程式は 2 次のものだけでなく、3 次方程式や 4 次方程式など、より高い次数の方程式を考えられるようになっていました。そして、2 次方程式において発見されていた「解の公式」と同じように、3 次方程式などもにも一般的な方程式を解く方法（つまり、どんな 3 次方程式でも解ける一定の操作）があるのではないか、という研究も進められていました。この『偉大なる術（アルス・マグナ）』には、その 3 次方程式の解の公式や、4 次方程式の解法が紹介されていたのです。

余談ではありますが、3 次方程式の解の公式も 4 次方程式の解法も、カルダノ自身の発見ではありません。3 次方程式はタルタリアという人から「公表しない」という約束で教えてもらったものでした。もちろん、上記のように公表してしまったため、その後は大きなトラブルに発展しました。4 次方程式のほうは、カルダノの弟子、ルドヴィコ・フェラーリ（Ludovico Ferrari 1522-1565）の発見です。カルダノが、これら自分の業績ではないものを自著のなかで発表した、ということについては賛否両論あり、それに付随するさまざまなドラマもありますので、興味のある人はまた調べてみてください。

さて、3 次方程式の解の公式がカルダノ自身の発見ではないことはさておいて、カルダノは、その 3 次方程式の解の公式を研究する中で、ひとつの

重要な発見をしました。3次方程式の解の公式は、途中で2次方程式を解いてその解を利用するのですが、その“途中の2次方程式”が「解のない方程式」でも、最終的な3次方程式の解がちゃんと出てくるパターンがある、ということに気づいたのです（たとえば、$x^3 = 15x + 4$という3次方程式をこの公式で解くと$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$という解が出てくるのですが、別の解き方をするとこれは$x = 4$のことだとわかります）。そこで、2乗して負になる数がでてきたとき、「解なし」として無視するのではなく、きちんとそれを数として認め利用する必要がある、と考えました。カルダノは「たして10、かけて40になる数（$x^2 - 10x + 40 = 0$の解）」を「解なし」ではなく$5 + \sqrt{-15}$と$5 - \sqrt{-15}$としたのです。ここに虚数（複素数）の概念の萌芽が見られます。

しかしカルダノ自身も、虚数について十分理解していたわけではなく、実際に「それによって受ける精神的苦痛を忘れ、ただこれらの量を導入せよ」と書いているように、「よくわからなけど、とりあえずそういう数が存在することにしておけば便利だから、ひとまず考えてみようよ」という様子だったようです。その後、16世紀後半には、カルダノの弟子ラファエロ・ボンベリ（Rafael Bombelli 1526-1572）が、「虚数単位」を定義し、虚数の演算規則についても整備しました。

もちろん、そうして誕生した虚数の概念は、すぐに数学者達に受け入れられたわけではありません（当時は、負の数ですら、まだ完全に受け入れられていたわけではありませんでした）。$\sqrt{-1}$の気持ち悪さは、主に「視覚的に認識できない」という点にあります。

17世紀には、ルネ・デカルト（Ren Descartes 1596-1650）が数を数直線上の点と対応させることで、ついに「負の数」を可視化することに成功します。しかし、そのデカルトをもってしても「2乗して負になる数」というのは理解しがたく、そういった数には「imaginary number（虚数）」という名前が彼によってつけられることになりました。

さて、その後も様々な数学者が「理解できない」や「そんな数は存在しない」と言う一方で、虚数の存在を信じ、可視化を試みる数学者たちもいました。そういう人たちの研究により、負の数が原点を挟んで正の数の反対側にあるのなら、虚数はその線の外にあるのではないか、ということが徐々にわかってきました。そしてついに19世紀前半、ドイツの数学者カール・フリードリヒ・ガウス（Carolus Fridericus Gauss 1777-1855）が、そういった数を平面上の点と対応付けて整理しました。ここで虚数と実数はひとつ

の概念にまとめられ「複素数（complex number）」、つまり、“複数の素を持つ数”と名付けられることになります。この複素数が対応付けられた平面のことを、ガウスにちなんでガウス平面とよぶこともありますが、一般的には「複素平面」とよびます。数を表した直線を「数直線」とよぶのと、似たような感覚だと思っていただいて大丈夫です。

複素数とは、一般的な座標平面でいうと x と y、2つの要素を持った数のことです。あとで詳しくやりますが、今まで見てきた「実数」というのはそのうちの y の要素が0である数です。複素数を考えることにより、2つの次元を持つ数を、代数的な計算として扱うことが出来るようになりました。

複素数は「複数の要素」を持つ数ですが、その「複数」というのは別に2つでなくてもいいのではないか、と考えた人もいます。イギリスの数学者、ウィリアム・ローワン・ハミルトン（William Rowan Hamilton 1805-1865）がその代表です。ハミルトンは1835年、複素数の演算規則を整理しましたが、その後も複素数の研究を続け、三元数や四元数への拡張を試みました。しかし結論としては、既存の四則演算をそのまま利用できるのは複素数（二元数）までである、ということになったのです。つまり、人類が実生活において計算している数の体系の完成形が、この「複素数」の体系だ、ととらえることもできるかもしれません。（ちなみに、だからといってハミルトンの研究は無駄にはならず、三元数は新しく「空間ベクトル」という概念へつながっていき、四元数は積の交換法則以外が成り立つ新たな数の体系として発展していくことになりました。）

複素数の概念は、とてもむずかしい概念ですが、世界の最先端の数学者達でさ、300年の議論を経てようやく受け入れてきたものです。そういう意味では、私たちが、学校で少し習ったくらいで理解できなくても、そんなに深刻に悩む必要はないのではないかと思います。

＜まとめ＞

・　「2乗して負になる数」は存在しないものと思われていた。

・　しかし16世紀に入り、3次方程式の解の公式が考えられるようになると、そのような数の存在を無視できないようになった。

・　そこからしばらくは、数学者の中でもそういった数を「想像上の数（虚数）」とする風潮があった。

・　一方で、虚数を可視化しようという試みも行われ、19世紀初め、ガウ

スは虚数と実数をあわせた複素数という概念を導入し、それらを平面上の点と対応付けて整理した。
・　複素数を用いることで、2つの次元を持つ数を、代数的な計算の中で扱うことができるようになる。

2.3.2　虚数、複素数の性質

それでは、次に虚数や複素数の性質について、実際に見ていくことにしましょう。

＜虚数単位＞

まずは、虚数単位を定義します。記号では i と表現されているものについてです。

「$x^2 = -1$ となる x のうちの1つを i とする」

これが虚数単位 i の定義です。"1つを"と書かれていると、じゃあ他にもあるのかな、と気になりますが、それは気になるのが正解です。ちなみに、他のものが具体的になんなのか、というと、$-i$ のことですね。つまり、$x^2 = -1$ となる x は $\pm i$、ということです。この i という記号自体は、18世紀後半、オイラーが導入したもので、「imaginary number」の頭文字の i です。
いきなり定義だけ言われても、何のことかイメージが掴みにくいと思うので、実際にそれを使って数を表す練習をしてみましょう。

【Question 1】
次のそれぞれの数を、虚数単位 i を使って表現してください。

$\sqrt{-2}$　　$\sqrt{-5}$　　$\sqrt{-9}$

【解説】
$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ と考えてみましょう。例えば、$\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1} =$

$\sqrt{2}i$ というふうに考えていけばいいです。同様に考えると、$\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$、$\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$ ですね。これにより、一般的に $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ と考えればいい、ということが分かります。

一見すると簡単にも見えますが、基本的な部分なので、丁寧に確実に出来るようにしておいて下さい。虚数の気持ち悪さ、というのは、実はこのあたりにも顔を出しています。従来通り根号の中身が正の数であれば、$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$が成り立ちます (たとえば$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$)。しかし、根号の中身が負の場合、つまり虚数を認める場合、この式は成り立ちません。たとえば、$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$を考えるとすると、$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$の式に当てはめるのであれば、$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{(-2) \times (-3)} = \sqrt{6}$となりますが、実際には、$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = \sqrt{6}i^2 = \sqrt{6} \times (-1) = -\sqrt{6}$です。根号の中が負の数になっている場合、ただちに虚数単位を用いた表現に改めておいたほうが、扱いやすくなります。

さて、虚数単位は $x^2 = -1$ になるものだけ定義すればいいのでしょうか。たとえば、$x^4 = -1$、つまり、2 乗して i になる数などは新しく定義する必要はないのか、という疑問を持ちませんか（できれば持って下さい)。しかしこの虚数の概念の素晴らしいところは、$x^2 = -1$ になるもの、つまり i を一つだけ定義すれば、他に新しい数を定義する必要がない、というところです。つまり、他の方程式の解も、すべてその i を用いて表現することができるのです。（またあとで詳しくやりますが、$x^4 = -1$ になる x は、たとえば $x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ などがあります。）

「複素数係数の任意の n 次多項式は複素数の範囲に n 個の根を持つ」

つまり、係数が複素数までの範囲にある n 次の方程式は、ちょうど n 個の解を持ち、それらはすべて複素数で表現できる、ということですが、これは「代数学の基本定理」として非常に重要な定理です。2 次方程式なら 2 個、3 次方程式なら 3 個、解がある、ということです。この個数には重解も含みます。つまり、2 個あるはずなのに、その 2 つが同じ値になってしまい、見かけ上は 1 つにみえる、というパターンもある、ということです。（ちなみにこれは 1799 年、ガウスが証明した定理です。ガウスが複素平面によって複素数の概念を整理したのは 19 世紀に入ってからでしたが、その前からずいぶんと複素数についての研究を進めていたようです。）

＜複素数＞

それでは先ほど定義した虚数単位を利用して、複素数を考えます。複素数とは、実数 a, b と虚数単位 i を用いて、$a + bi$ と表すことのできる数のことです。

$$a + bi$$

この、a の部分を実部、bi の部分を虚部とよびます。特に $b = 0$ のときは、虚部がなくなりますので、実数になっていますね。複素数には実数も含まれる、と言うのは、今まで何度も繰り返した通りです。ちなみに $a = 0$ のパターンは、純虚数とよばれます。この実部と虚部を分けた形が、複素数を表現するときのオーソドックスな形になります。

さて、複素数をみていくとき、いくつかの重要な特徴があります。

ひとつめは、「$a + bi = c + di$ のとき、$a = c, b = d$」ということです。つまり、2 つの複素数が等しいとき、実部同士、虚部同士も等しくなければなりません。これは何を意味しているかというと、「虚数かける実数は、実数にならない」ということでもあります。たとえば、$2a + 3b = 2c + 3d$ を考えてみてください。これはもちろん、$a = c, b = d$ のときに成立しますが、$a = c + 3, b = d - 2$ のときにも成立します。それは、2×3 の 6 という値が、$2a$ のほうでも $3b$ のほうでも作ることができ、そこの部分を交換することが可能だからです。しかし、複素数ではそれができない、ということは、$1 \times a$ と $i \times b$ で同じ値を作ることができない、つまり「虚数かける実数は、実数にならない」と言えるのです。

もうひとつ、複素数について大事な特徴は、「複素数には大小関係がない」ということです。ここは少し注意深く見る必要があります。たとえば、$3 + 2i$ と $5 + 6i$ なら、後者のほうが大きいのではないか、と考えるかもしれません。それでは $3+2i$ と $1+7i$ ならどちらが大きいのでしょうか。ああ、なるほどそれはどちらが大きいか決められないね、と納得される方もいらっしゃるかもしれませんが、実はまだここでは納得してほしくありません。「実部の大きさが大きいほうが大きい。実部の大きさが同じときは虚部の係数が大

きいほうが大きい（辞書式の順番をイメージして下さい)」というふうに考えると、$3+2i$ と $1+7i$ なら前者が大きいというふうに決めることができるからです。つまり、大小関係がない、とはいっても、順序関係なら決めることができるのです（何らかの規則によって、すべての複素数を「大きい方」から「小さい方」へ一列に並べることが出来る、という意味です)。それではここで言う「大小関係がない」というのはどういうことでしょうか。それは、そういうふうに順序関係を決めても、今までの計算ルールにあう形にはならない、つまり、実数のときと同じルールでは不等号（不等式）を扱えない、ということです。仮に i を含んだ数が今までの不等式で扱えるとすると、以下の3つのうちのどれかが成立するはずです。

①　$i > 0$
②　$i = 0$
③　$i < 0$

このうちの、②に関しては、$i^2 \neq 0^2$ なのは明らかなので、考えなくてもいいでしょう。①か③のどちらか、ということになります。まずは①の方で考えてみましょう。不等式の両辺に $a > 0$ である a をかけても、不等号は入れ替わりません。なのでここは両辺に i をかけてみましょう。$i > 0$ なので、不等号は入れ替わらないはずです。

①　$i > 0 \quad \rightarrow \quad i^2 > 0 \times i$

しかしこれは、$-1 > 0$ となってしまうので、不適切です。同様に、③の場合も考えてみます。不等式の両辺に $a < 0$ である a をかけると、不等号は入れ替わります。③の両辺に i をかけると、今度は $i < 0$ なので符号が入れ替わり、

③　$i < 0 \quad \rightarrow \quad i^2 > 0 \times i$

となり、やはり $-1 > 0$ となってしまいます。よって、$i > 0$ でも $i < 0$ でもない（もちろん $i = 0$ でもありません）ということになってしまうので、i は不等式で扱うことができません。i が不等式で扱えなければ、当然、i が絡む数はすべて不等式で扱えないことになります。これが「複素数には大小関

係がない」ということの意味なのです。

それでは最後に、「共役複素数」にも触れておきましょう。$z = a + bi$ に対して、$a - bi$ のことを共役複素数といい、$\bar{z}$ と表します（もちろん、$a - bi$ に対して $a + bi$ も共役複素数です。というよりも、この 2 つの複素数の対を共役複素数とよぶ、と解釈するのがいいと思います)。つまり、実部が同じで、虚部の符号が入れかわった複素数のペアのことですね。共役の「やく」の字はもともと「軛」という字で、荷車や人力車の手に持つ部分のことです。2 つの棒に繋がれ、それらを同時に制御していることから、“2 つのものが結びついてセットになっている”というイメージがあります。つまり、「共役複素数」というのは、重要なつながりを持った複素数のペア、というふうに考えていただければいいと思います。

なぜこの組合せが大事かというと、これら共役複素数は、和も実数、積も実数になるからです（和が実数になるのは明らかですね。積についてはあとで計算します)。そしてこの性質から、実数係数の方程式が複素数の解をもつ場合、必ず共役複素数がセットで出てくることになります（ダランベール)。（そこからさらに例えば「3 次方程式は少なくとも 1 つ実数解をもつ」ということもできます。先ほどの「代数学の基本定理」から、3 次方程式は 3 つの解を持ちますが、これが 3 つとも複素数だった場合、ペアにできないものが 1 つ出てしまうからです。もちろん、3 つとも実数解の場合もありますが、1 つも実数解がないというパターンはありません。）

＜複素数の計算＞

複素数の重要な性質について軽く触れたところで、次は実際に計算していきましょう。計算のルール自体はそれほど難しくありません。要は慣れです。基本的には i を文字と同様に扱い、i^2 が出てきたところは $i^2 = -1$ を代入して計算を進めていけばいいです。

【Question 2】

次のそれぞれの数式を計算してください。

$(3 + 2i) + (4 - 3i) =$

$(5+4i)-(7-2i)=$
$(4+5i)(3-i)=$
$(3-4i)\div(2+5i)=\frac{3-4i}{2+5i}=\frac{(3-4i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=$
$(3+2i)+(4-\sqrt{2}i)=$
$(2+\sqrt{3})-(3+\sqrt{2}i)=$
$(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)^2=$
$(a+bi)+(c+di)=$
$(a+bi)-(c+di)=$
$(a+bi)(c+di)=$
$(a+bi)\div(c+di)=$
$(a+bi)(a-bi)=$

【解説】
$(3+2i)+(4-3i)=7-i$
$(5+4i)-(7-2i)=-2+6i$
$(4+5i)(3-i)=12-4i+15i-5i^2=17+11i$

ここまでは特に問題ないでしょう。

$(3-4i)\div(2+5i)=\frac{3-4i}{2+5i}=\frac{(3-4i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{-14-23i}{29}(=-\frac{14}{29}-\frac{23}{29}i)$

分母が虚数になっているとき、分母と分子の両方に「分母の共役複素数」をかけることで、分母を実数にすることができます。

$(3+2i)+(4-\sqrt{2}i)=7+(2-\sqrt{2})i$
$(2+\sqrt{3})-(3+\sqrt{2}i)=(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}i$

虚部が $(2-\sqrt{2})i$ になったり、実部が $(\sqrt{3}-1)$ になったりしていますが、無駄にビビったりせず、堂々とそのまま書きましょう。これ以上簡単に書くことができないのですから、仕方ないのです。

$(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)^2=i$

これが先ほど出てきた「2 乗すると i になる数」ですね。

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
$(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

数字を一般化すると、こういう感じになりますね。

$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

分母を実数化するときにすでに計算しているとは思いますが、共役複素数の積を一般化するとこうなります。

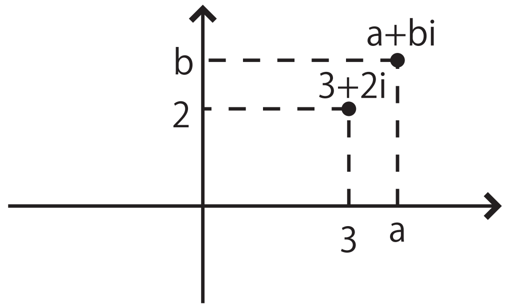
以上いくつか計算してみましたが、普通の文字が入った数式の計算とあまり変わらないので、少し練習を積めばすぐに慣れるでしょう。交換法則なども今まで通り成立しますので、難しいことは考えずに普通に（ただし丁寧に）計算していけば大丈夫です。

＜まとめ＞
・　虚数単位 i とは、$x^2=-1$ となる x のうちの 1 つである。
・　虚数単位を導入することで、すべての実数係数多項式は根を持つことができるようになる。
・　複素数とは、実数 a,b と虚数単位 i を用いて、$a+bi$ と表すことのできる数である。
・　実数に虚数をかけたものは、実数にはならない。
・　複素数の計算においては、虚数単位 i を文字のように扱えばよいが、i^2 は -1 と置き換えて計算する。
・　交換法則などは実数と同じように成立する。

2.3.3　複素平面上での複素数の振る舞い

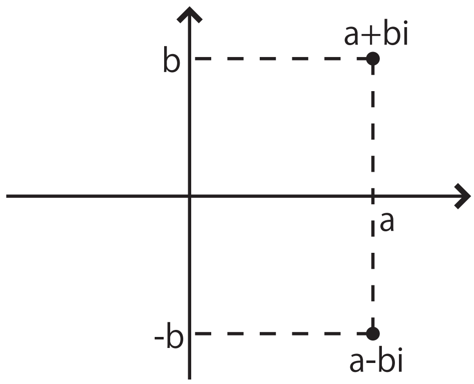
＜複素平面＞

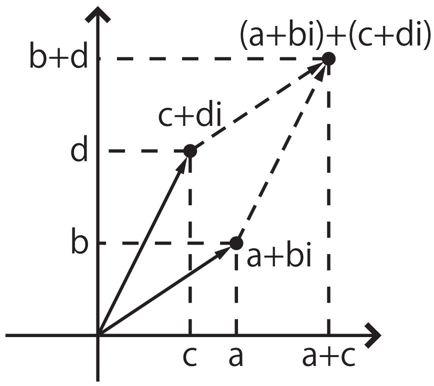
それでは最後に、複素平面を利用して複素数を考えてみましょう。



複素平面を考えるにあたり、いつも見ているような座標軸をまず考えてください。ただし、普段 x 軸とよんでいる水平方向の軸を実軸、y 軸とよんでいる鉛直方向の軸を虚軸とよびます。（ここで虚軸を取り去って、実軸のみを考えたものがいわゆる数直線ですね。）この座標平面において (a,b) という座標で表される点を、“ $a+bi$ を表す点”として考えるのです。たとえば、原点から画面上の右方向に 3、上方向に 2 進んだ点は $3+2i$ という複素数に対応します。つまり、虚数単位 i というのは、$+$ や $-$ だけでは表せない“3 つ目の符号（方角）”を表している、と考えることが出来るかもしれません。$+$ と $-$ はある意味では違う方向ではありましたが、そうは言っても同一直線上での反対方向なので、差し引きすることができました。しかし i というのはまったく別の方向なので、$+$ や $-$ の値とは差し引きすることはできません。

この複素平面を導入することにより、複素数の様々な特徴や計算を、図形的に捉えることが出来るようになりました。例えば、共役複素数（$a+bi$ と $a-bi$ ）は、実軸を挟んで線対称な位置にありますし、複素数の和は、ベクトルの和として捉えることができます。





それでは、「複素数の積」は図形的にどう捉えることが出来るのでしょうか。それを考えるために次回、まずは「極形式」という概念の導入から入っていきます。