おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第10回授業内容＞

---

§3　オイラーの公式を読み解く

2）　微分

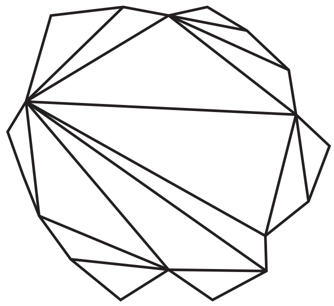
(1) 微分積分学の歴史

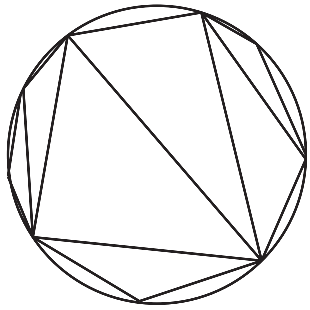
「微分」というと、必ず「積分」がセットで出てきます。学校でもセットで習いますし、実際に微分と積分の間には密接な関係があります。ここでもそれらの発生や発展を一緒に見ていきます。しかし、もともとこれらは、実はまったく別の概念として発生した、というと驚きますか。

しかも、カリキュラム上では微分を先に習い、そのあとに積分、という流れですが、先に発生したのは積分の概念のほうでした。

＜積分法の発生＞

古代ギリシャでは、図形の面積を求めるとき、その図形をいくつかの三角形に切り分け、そのひとつひとつの三角形の面積を合計して計算する、という方法がありました。三角形の面積はすべて「底辺 × 高さ ÷2」で求められるので、この方法を使えば、複雑な形の面積でも求めることができます。

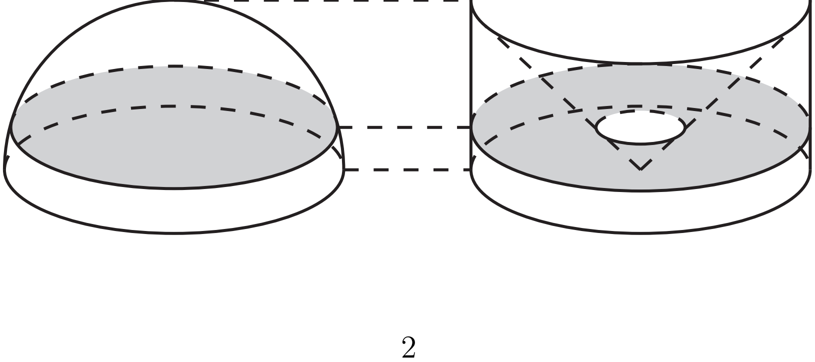




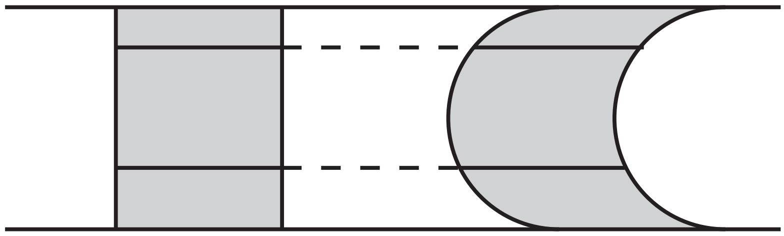
この方法を使うと、曲線図形の場合は直線図形の場合ほど上手く取り尽くすことができず、無限に隙間に三角形を埋めつづけることになりますが、しかし実際この方法で曲線図形の面積を求めた人がいましたね。そうです、アルキメデスです。アルキメデスは、「無限に足していった先」の収束する値を考えることで、円の面積を計算しました。アルキメデスは紀元前3世紀の人ですが、極限の概念をすでに感覚的に使えてしまっていた、というわけです。（前回お話したとおり、「はさみうちの原理」を使っていました。）

この、「細かく分けたものを合計して全体の面積を考える」というのが、積分の概念の根本的な発想です。5世紀には、似たような発想を使って中国で球の体積も計算されていました。

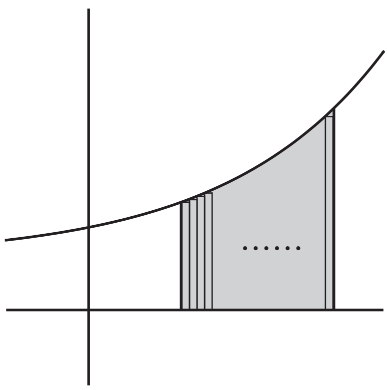
さらに進んで17世紀前半には、イタリアのフランチェスコ・ボナヴェントゥーラ・カヴァリエーリ（Francesco Bonaventura Cavalieri 1598 - 1647）が、カヴァリエリの原理を発見します。この原理は、「ある2つの立体について、それらを同じ高さの地面と平行な面で切ったとき、どの高さで切っても切り口の面積がおなじになるならば、その2つの立体の体積は等しい」というものです。



（「半球」と「円柱から三角錐を繰り抜いた図形」の体積は等しくなります。）
　分かりにくければ、コピー用紙の束を想像して下さい。この束に適当な力を加えて前後や左右に歪めたとしても、体積は変わりませんよね。この事実を少し一般化して、同じ高さにある紙同士が、同じ面積であればいい、という話です。
　この原理は平面図形においても成り立ちます。平面図形の場合は、「切り口の直線の長さが常に等しければ、面積が等しい」と読み替えます。



　面積を“線の面積”の和、体積を“面の体積”の和、というふうに考えている、とも言えるわけですが、この発想は現在の「積分」の技法にだいぶ近づいてきます。（つまり、いわゆる「積分」というのは、「面積（体積）を、薄くスライスした線（面）の“面積（体積）”の和として求める手法」と理解してもらえればいいかと思います。複雑な計算方法は、「薄くスライスした線（面）の“面積（体積）”」というよくわからないものを考えるための単なる技法、というわけです。）



　＜微分法の発生＞
　面積や体積を求める積分に対し、微分の概念は物体の運動と密接な関係があります。そのため、静止しているものを対象として発生した積分よりも、概念の発生が遅れることになりました。古代ギリシャでは、例のゼノンという人がこういうことも言っています。いわく、「飛んでいる矢は動いていない」と。飛んでいる矢を考えます。しかしある一瞬を切り取ると、この矢は静止しているはずです。そうすると、次の瞬間も静止していて、さ

らにその次の瞬間も静止していて……となってしまい、結局その矢は動いていないことになってしまいます。この話はあきらかにおかしいのですが、古代ギリシャの時代の認識は「おかしいよね」というレベルに留まっていた、ということです。

しかしそこから科学が発展し、物体の運動に関する研究も進んでいきます。特に、天文学や物理学の発展は重要な要素でしょう。特に物理学では「加速度」という概念が考えられるようになります。「速度」というのは「位置」の変化した量ですが、さらに「速度」の変化量が「加速度」です。この変化の量、それも瞬間瞬間での変化量を調べる、というのが、微分の根本的な発想です。

本格的に微分が発展するのは17世紀のはじめです。以前にもお話したように、デカルトが座標平面を数学の世界に導入しました。そしてそれを利用して、デカルトやピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat 1607末または1608初 - 1665）は、関数の変化を図形的（幾何学）でとらえようとしたのです。そして、グラフの接線を考えるとき、曲線の一部を極小の長さの直線に近似する、というのが微分が発展する上で重要な発想となりました。

＜微分積分学の成立＞

こうして微分と積分がそれぞれ成熟してきた17世紀後半、ついに「微分と積分が、お互い逆の演算・操作になっている（微分積分学の基本定理）」ということが発見されます。この事実の発見により、微分と積分はひとつの概念にまとめられ、「微分積分学」という数学の一分野として成立することになったのです。

これを発見した人は2人います。ひとりは、ドイツの数学者、ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz 1646 - 1716）。もうひとりがイングランドのアイザック・ニュートン（Isaac Newton 1642 - 1727）です。ほぼ同時期の発見だったため、どちらが先に発見したか、という論争もありました。特に、発見したのはニュートンが先、発表したのはライプニッツが先、という状況だったため、ニュートンのアイディアをライプニッツがパクったのではないか、という疑惑もありました。しかし、ニュートンは微分から、ライプニッツは積分からこの事実の発見にいたったことがわかっており、今ではそれぞれ独立して発見した、ということになっています。

閑話休題。いずれにせよ、微分と積分が一緒に扱われることによって、微分積分学、そしてそれを基盤とした解析学が発展していくことになります。特に、ライプニッツはヤコブ・ベルヌーイとも交流をもち、ライプニッツから微積分を教わったヤコブ・ベルヌーイは弟のヨハン・ベルヌーイと共同研究をしていきます。このヨハン・ベルヌーイこそオイラーの先生で、そこからオイラーの研究へとつながっていくのです。オイラーが数学を研究していたころは、この微分積分学が成立した直後、という時代であり、言ってみれば流行の最先端だったわけですね。オイラーの著書、『無限解析入門』は、当時最先端にあった解析学について、古典的な手法から、オイラーの研究成果まで、丁寧に整理した“教科書”なのです。

もちろん、この時期の微積分には、極限の扱いについて曖昧な部分がありました。それゆえに、その研究成果は認められない、という数学者もたくさんいました。しかしこの問題も、イプシロンデルタ論法を関数に適応することで解決し、現在は、理論としての微分積分はひとまず完成し、便利な道具としてさまざまな分野で利用されています。

微分を使うと変化の様子を捉えられますし、積分を使うとその変化の蓄積としての結果を分析することができます。微積分は、物体の運動だけでなく、“変化”するものを扱う分野であれば、自然科学にさえ限らず、どの分野でも必須の道具なのです。だからこそ、国の技術力や研究力の底上げを目的としている公教育では、必ず教えられることになるのです。（個人にとって学習する意味があるか、というのとはまた別の話ですけどね。）

＜まとめ＞

・微分と積分はそれぞれ別の概念として発生した。
・積分は、面積や体積を、極小部分の総和として捉える概念である。
・微分は、極小部分での変化の様子を捉える概念である。
・17 世紀後半、微分と積分がお互いに逆の操作・演算であることが発見され、これにより微分積分学が成立、それを基盤にして解析学が発展する。
・微分積分（及びそれを基盤とした解析学）は、現在では“変化”を扱うさまざまな場面で欠かせない道具になっている。

(2) 微分と関数の極限

それではここからは微分の技術的な話をしていきましょう。

＜平均変化率＞

まずは微分を考える前に、「平均変化率」という概念を導入しておきます。

小学校のころの算数の問題で、速さを考える問題があったのを覚えていますか。例えば、「120km 離れた 2 つの地点を移動すると、2 時間かかりました。さて時速何 km で移動したでしょう」みたいな問題です。この問題を解くのは簡単で、$120 \div 2 = 60$ で時速 60km ということになります。しかしよくよく考えてみてください。時速 60km というとまあ車を想定しているわけですが、車は常に同じ速さで走り続けているわけではありません。発進するときは徐々に速度を上げていきますし、止まるときも徐々に速度を落としていきます。周りの車の流れにあわせて速度も変化させますし、そもそも信号があれば止まらなければいけないでしょう。もしかすると、実際に時速 60km ちょうどで移動しているのはほんの少しの間だけかもしれません。それでは、60 という値は一体何なのでしょうか。この「途中はなんだかんだあるかもしれないけど、一定の速さで進んだと考えたときの速度」というのが、「平均速度」という考え方です。

この考え方をもう少し一般化しましょう。速度というのは、「位置の変化量」です。位置がどれだけ変化したか、というのが、そもそもの速さの概念です。ここで、時間を x、そのときの位置を y として、x と y の関係を考えてみましょう。

速度が常に一定のときを考えると、x と y は例えば以下のように変化していきます。

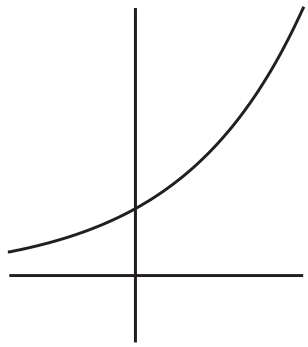
x	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	0	2	4	6	8	$\cdots$

これはつまり、$y = 2x$ ということですが、このときは常に y が 1 増えるごとに x も 2 ずつ増えているので、「速度」も 2、と簡単に考えることができます。

それでは、次のような場合はどうでしょう。

x	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	1	2	4	8	16	$\cdots$

この関係をグラフにすると、右のようになります。この場合は時間帯によって「速度」が違います。そこで「平均速度」の考え方を使いましょう。0秒後から1秒後までの「速度」は1、1秒後から2秒後までの「速度」は2です。1秒後から3秒後までは、2秒で6進んでいるので「速度」は3、ということになります。

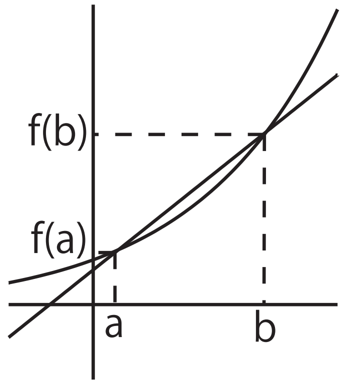


今、「速度」という具体的な状況を取り去り、単純に「xとyという2量の関係」に一般化したとき、「平均速度」にあたるものを「平均変化率」と言います。

つまり、$f(x)$が$x = a$から$x = b$まで変化するときの平均変化率は、

$$(\text{平均変化率}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる、ということです。



【Question 1】

$y = x^2$について、次のそれぞれの区間での平均変化率を調べて下さい。

$x = 0$から$x = 2$　　$x = 4$から$x = 8$

$x = 3$から$x = 3 + h$　　$x = a$から$x = a + h$

【解説】

・$x = 0$から$x = 2$

$x = 0$のとき$y = 0, x = 2$のとき$y = 4$なので、xが2増える間にyが4増えているので、平均変化率は2

・$x = 4$から$x = 8$

同様に、$x = 4$のとき$y = 16, x = 8$のとき$y = 64$なので、xが4増える間にyが48増えているので、平均変化率は12

・$x=3$ から $x=3+h$

文字が入ってきても同じです。$x=3$ のとき $y=9, x=3+h$ のとき $y=(3+h)^2=9+6h+h^2$ なので、x が h 増える間に y が $6h+h^2$増えているので、平均変化率は $\frac{6h+h^2}{h}=6+h$ です。

・$x=a$ から $x=a+h$

同様に、$x=a$ のとき $y=a^2, x=a+h$ のとき $y=(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$ なので、x が h 増える間に y が $2ah+h^2$増えているので、平均変化率は $\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$ です。

＜関数の極限＞

さて、平均変化率を考える区間をどんどん小さくしていくとどうなるでしょうか。先ほど、$x=3$ から $x=3+h$ や $x=a$ から $x=a+h$ の区間での平均変化率を考えましたが、この h の値をどんどん小さくしていくのです。そうやって、h を「限りなく 0 に近づけ」れば、瞬間的な変化率（速度で言うと、瞬間速度）がわかるのでは、というのが微分です。（ちなみに、この「瞬間的な変化率」を「微分係数」とよびます。）

「限りなく」というのは極限の概念ですので、極限の記号を使って表しましょう。

$$\lim_{h\to 0}(2a+h)=?$$

この値を求める、ということです。

前回数列の極限を考えるとき、（$\epsilon-\delta$）論法を使いましたが、関数でも同じ論法を使います。数列のときは「限りなく大きくしていく」でしたが、関数の場合は「限りなく○○に近づける」なので、少し調整が必要です。関数でのイプシロンデルタ論法は以下のように表現されます。（ここでようやく δ が出てきます。）

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x[0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\epsilon]$$

これをそのまま日本語になおすと、「x が a に限りなく近づくとき $f(x)$ の値の極限が b」というのは、「すべての ϵ に対して、“$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-b| < \epsilon$”となる δ が存在する」という意味である、となります。この後半部分は、「どんな ϵ（誤差）を設定しても、“a から δ 以内にあるすべての x について、$f(x)$ の値が $b \pm \epsilon$ の範囲に収まる”という δ（距離）を設定できる」と解釈することができます。「どんな ϵ（誤差）を設定しても、適切な δ（距離）を与えれば、“a から δ 以内にあるすべての x について、$f(x)$ の値を $b \pm \epsilon$ の範囲に収めることができる」という解釈でもかまいません。ちなみに、数列の極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n[N < n \Rightarrow |a_n - A| < \epsilon]$$

でした。これは「どんな ϵ（誤差）を設定しても、適切なNをとれば、そこから先の a_n がすべて $A \pm \epsilon$ に収まる」ということでした。数列のときは、先へと進むイメージだったので「N から先」を考えていたところを、関数の場合は自由に行ったり来たりするイメージを考えて「a からの距離が δ 以内」としているわけです。

この論法を理解するのはなかなか難しいですが、少なくとも、極限の計算についての「本当にその計算方法でいいのか？」という疑問は、数学的にはこの論法によってすでに解決された、ということを理解していただければ、と思います。個人個人の学習者が納得いかなくても、それはこの論法をしっかり理解して下さい、としかいえない、という話です。

それでは、実際に関数の極限をしらべてみましょう。

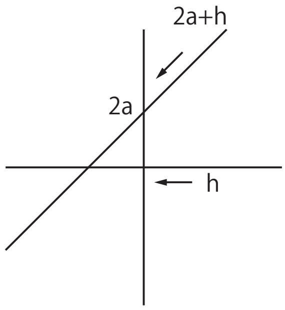
【Question 2】

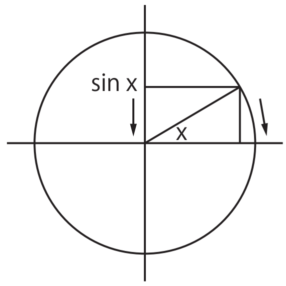
次の極限の値を調べて下さい。

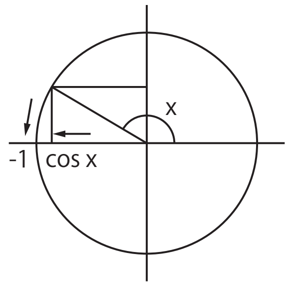
$$\lim_{h\to 0}(2a+h) = \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\sin x = \qquad\qquad \lim_{x\to\pi}\cos x =$$

【解説】

それぞれ、$\lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$、$\lim_{x\to 0}\sin x = 0$、$\lim_{x\to\pi}\cos x = -1$ となります。図を書いて考えると、以下のようになります。







「近づく先の x について $f(x)$ が実際に値をとる場合は、その値になるんだなぁ」と考えてもだいたいあっています（もう少し厳密な議論をする必要はありますが）。こういう場合は、あまり「極限」の考え方が威力を発揮する場面ではありません。

【Question 3】

次の極限の値を調べて下さい。

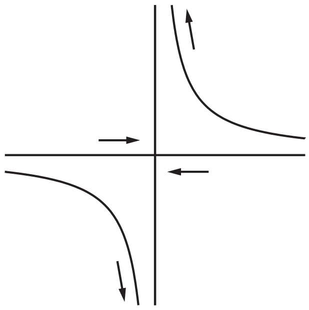
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \qquad \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h - 1)}{h} =$$

【解説】

極限の考え方が必要になってくるのは、近づく先の x について、$f(x)$ が値を取らない場合です。たとえば、分数の形で分母が 0 に近づいていく、というパターンなどです。順に見て行きましょう。

・$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

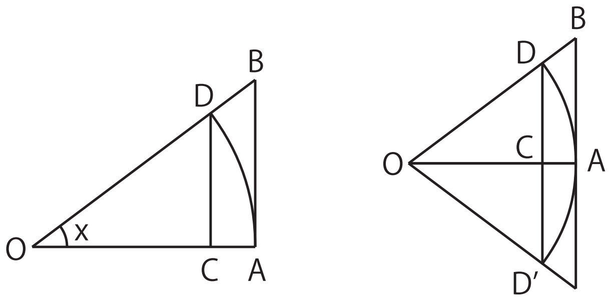
基本的な形なので、想像はできそうな気がします。しかし、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$ じゃないの？と思った方、間違いです。これについては少しいじわるをしています。確かに分母をどんどん小さくしていくと、$\frac{1}{x}$ の値はどんどん大きくなるような気がします。限りなく x を小さくすれば、∞ になりそうな気もします。しかし、実は実際の $\frac{1}{x}$ のグラフは以下のようになっています。



x が 0 より大きい部分では、今考えたようになっていますが、今度は $x < 0$ のほう、たとえば $x = -3$ あたりから順に 0 に近づけていってみてください。$\frac{1}{x}$ はどんどん小さくなっていき、最後には $-\infty$ に向かっていっているのがわかりますか。つまり実は、$\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ は、x を正の側から 0 に近づけるか、負の側から近づけるかによって、向かう先が変わるため、値を決めることができません。しかし、正の側からだけ、もしくは負の側からだけ、というのを見れば、向かっていく先が明らかなので、これだけ取り出して考えたい、という場面もあるでしょう。そういうときは、$\lim_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = \infty$、または、$\lim_{x \to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ というふうに表現することができます。

・$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

これは分母も分子も 0 に近づいていくパターンですね。数列の極限を考えたときと同じように、こういうパターンはそれぞれ個別に工夫して計算していかなければなりません。今回は、以下のように考えます。



図のような三角形 OAB と、O を中心とする円の一部を考えます。考えやすいように、円は単位円（つまり OA=1）としておきましょう。そうすると、CD=$\sin x$,AD=x,AB=$\tan x$ となりますね（ここが怪しい人は、弧度法のところと三角関数のところを復習してください）。この 3 つの値について、大小関係を考えます。もちろん、$\sin x < x < \tan x$ に見えますが、それを数学的に議論します。

今、図のように、三角形OABの下側に同じ形をひっくり返してくっつけます。2点間の距離は直線で結んだときが最短、というのは数学的にも認められているため、DD'間の最短距離は、CD×2です。よってCD×2<AD×2より、$\sin x < x$とわかります。

ADとABの大小関係については、面積を考えます。扇型OADの面積は$\frac{1}{2}$OA·AD= $\frac{1}{2}x$、三角形OABの面積は$\frac{1}{2}$OA· AB= $\frac{1}{2}\tan x$です。（扇型OADの面積）<（三角形OABの面積）なので$\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$、つまり$x < \tan x$です。これで$\sin x < x < \tan x$が証明されました。

ここからはちょっとしたテクニックを使います。まず先ほどの不等式を$\sin x$で割ってしまいます。そうすると、

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

（今xは“0より少しだけ大きい値”を考えているので、$\sin x > 0$です。不等号の向きは変わりません。）

また、$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$なので、$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$です。ここで、それぞれの極限をとると、

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$なので、はさみうちの原理により$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$となります。$\frac{\sin x}{x} = 1 \div \frac{x}{\sin x}$なので$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$です。

ちなみに、この値は非常に重要で、これから三角関数を微分していくときに必要になってきます。また同時に、この値が「1」というきれいな値になる、というのも重要です。この値が1になるのは、ADの長さをxと表しているからです。ここがxになるのは、弧度法を使っているからですが、つまり、弧度法とはこの$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$を成立させるための角度の定義なのです。弧度法の話のときに「弧度法を使うと三角関数の微分がシンプルになる」と言っていたのは、このことです。

・$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h}$

これも、分母・分子が共に0に近づいていくパターンです。しかし今回は式の変形でなんとかなります（これも数列の極限のときに使った発想ですね）。

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}$$ (分母と分子に $(\cos h+1)$ をかけました)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$$

(分子を展開したあと、$\cos^2 h+\sin^2 h=1$ つまり、$\cos^2 h=1-\sin^2 h$ を使って整理しました)

$$=\lim_{h\to 0}(-\sin h)\cdot\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{(\cos h+1)}=-0\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=0$$

(掛け算の順序を並べ替えて、極限が考えられる塊を作り出しました)

＜導関数＞

さて、この論法により、関数の極限を考えることができるようになります。そこで、微分の話に戻りましょう。平均変化率は $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ であり、これの x を a に限りなく近づけた値が、瞬間変化率、すなわち微分係数なのでした。

つまり、$f(x)$ の $x=a$ における微分係数は、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

と表すことができます。または、$x=a+h$ と考えて、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

です。

この微分係数を考えるとき、もとの関数の条件によっては、それぞれの点での微分係数も x の関数になることがあります。この関数を「導関数」といいます。（もちろん、関数にならない場合もあり、この“導関数を作れるかどうか”つまり微分可能かどうか、というのも、実は本来議論しなければならない部分です。学校では微分できる関数を扱うことが多いので、そのあたりの議論は省略されることも多いようですが。）

そういうわけで、導関数の定義です。

$y=f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とすると、

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f'(x)$ ではなくて、$\frac{dy}{dx}$ と表現することもありますね。この表現はライプニッツによる記法ですが、合成関数などを微分するときなどは、こちらのほうがわかりやすいので、こういう書き方をする場合もあります。

また、「$f(x)$ の $x=a$ における微分係数」は $f'(a)$ と表現します。

＜まとめ＞

・変化の割合が一定ではないとき、異なる 2 点間での平均の変化率を考える。

・そのとき、その 2 点を限りなく近づけると、瞬間的な変化率（微分係数）を考えることができる。

・「2 点を限りなく近づける」というのは、極限の概念である。

・もとの関数の条件によっては、それぞれの点での微分係数が x の関数になることがある。この関数を導関数と呼ぶ。

次回は、実際にいくつかの関数についての導関数を求めるところから始めます。もし余裕があれば、以下の問題を少し考えてみてください。

【Question 3】

次のそれぞれの関数について、導関数 $f'(x)$ を考えて下さい。

$f(x)=x^n \qquad f(x)=\sin x \qquad f(x)=\cos x \qquad f(x)=a^x$