おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第11回授業内容＞

---

§3　オイラーの公式を読み解く

2）　微分

(3) さまざまな関数の微分

理論が固まれば、あとは、さまざまな関数を微分すると具体的にどうなるのか、という話になります。高校の数学ではここを主に勉強するわけですね。たとえば $f(x) = x^2$ を微分してみましょう。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2xh + h) = 2x$$

同様に、$f(x)=x^3$ も微分してみます。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2h+3xh+h^2)=3x^2$$

なんとなく雰囲気はつかめてきたでしょうか。前回やった定義通りに式を書き、そこから順に計算しているだけですね。さて、それでは以下のそれぞれの関数を微分してみてください。それぞれ難しいですが、使う道具は今までにすでに登場しているはずなので、何が使えそうか考えてみてください。

【Question 3】

次のそれぞれの関数について、導関数 $f'(x)$ を考えて下さい。

$$f(x)=x^n \qquad f(x)=\sin x \qquad f(x)=\cos x \qquad f(x)=a^x$$

【解説】

・$f(x)=x^n$

まずは普通の整式（単項式・多項式）の微分です。この微分には二項定理を使います。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1})=nx^{n-1}$$

つまり、$(x^4)'=4x^3$ だったり $(x^7)'=7x^6$ だったりするわけですね。この $f(x)=x^n$ を組み合わせると、一般的な多項式はすべて微分できることになります。たとえば、

$(3x^4)'=3\times(x^4)'=3\times 3x^3=9x^3$

$(2x^3-x^2+5)'=(2x^3)'-(x^2)'+(5)'=6x^2-2x$

(定数を微分すると、0 になります。たとえば、$f(x)=1$ というのは、x の値に関係なくずっと 1 なので「変化率」は 0 です。)

・$f(x) = \sin x$、$f(x) = \cos x$

続いて三角関数の微分です。まずは $\sin$ から。
基本は $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ の形からスタートして、式変形です。変形に使えそうな道具は何か、考えてみてください。

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

そうですね、加法定理です（1 行目から 2 行目）。2 行目から 3 行目の変形は少しむずかしいかもしれませんが、前回、$\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ をやったのが実はヒントでした。

$\cos$ も同じようにやっていきます。

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \sin h}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$\sin x$ を微分すると $\cos x$、$\cos x$ を微分すると $-\sin x$ ということですが、$-\sin x$ をさらに微分すると、$(-\sin x)' = -(\sin x)' = -\cos x$ になります。つまり、三角関数を微分していくと、

$\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin \to \cdots$

というふうに、循環していくことになります。こうして上手く循環するための肝になっているのが、実は $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ の部分です。ここが 1 になっているからこそ、$(\sin x)' = \cos x$ になるわけです。前回、これを 1 にするために弧度法を導入した、という話もしましたし、もっと前には「弧度法を使うのは三角関数の微分のためだよ」という話もしたと思いますが、それはこういう意味だったのです。

・$f(x)=a^x$
最後に指数関数を微分します。

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}a^x = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

ここまではいいですね（怪しい人は指数法則を復習して下さい）。さて、ここから先はどう変形すればいいのでしょう。

実は、ここから先は今までの技術だけでは上手く変形していくことができません。これはおそらくオイラーも同じだったのでしょう。しかしオイラーはここで、新しい基準を持ち込みます。つまり、

$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$ となる $a=e$ としよう

と考えたのです。実は、これがオイラーによる e の定義です。そうして、そこから e という数はどういう数か考えてみました。

$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ とすると、無限小の数 w を用いて、

$e^w-1=w$

とあらわすことができます。これを変形すると、

$e^w=1+w$
$e=(e^w)^{\frac{1}{w}}$ より、$e=(1+w)^{\frac{1}{w}}$ となります。

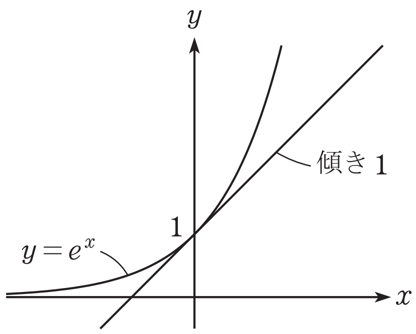
ここで、$\frac{1}{w}=n$ とすると (n は無限大)

$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

となります。これはどこかで見たような気がしませんか。そうですね。実はオイラーの定義した e は、ベルヌーイの見つけた例の定数と同じだったのです。

ちなみに、$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ という形は、$f(x)=a^x$ としたとき、$f'(0)$ でもあるので、指数関数 a^x の $x=0$ における微分係数（接線の傾き）と考えること

もできます。つまり、e は $f(x) = a^x$ の $x = 0$ での微分係数が 1 になる a、という表現もできます。



さらに、$e^w = 1 + w$ のところから、

$$e^x = (e^w)^{\frac{x}{w}} = (1 + w)^{\frac{x}{w}}$$

こういう変形をすると、$\frac{x}{w} = n$ として (n は無限大)

$$e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

となります。これも重要な式です。

さて、これを利用して $a = e$ の場合以外の微分も考えてみましょう。

$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = k$ とすると、無限小の数 w を用いて、

$a^w - 1 = kw$
$a^w = 1 + kw$
$w = \log_a (1 + kw)$　(底を a とする対数を考えました)
$\frac{1}{k} = \frac{1}{kw} \log_a (1 + kw) = \log_a (1 + kw)^{\frac{1}{kw}}$　($\frac{1}{kw}$倍しました)
$\displaystyle \frac{1}{k} = \lim_{n \to \infty} \log_a (1 + \frac{1}{n})^n = \log_a e$　($\frac{1}{kw} = n$ としました)

よって、$k = \log a$ となります。(途中の変形が怪しい人は、対数の性質を復習して下さい。)

つまり、$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a$ なので、

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} a^x = a^x \log a$$ となります。

ちなみに、対数関数 $(\log_a x)$ の微分は

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$ (まずは定義通り)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\log_a (x+h) - \log_a x)$$ ($\frac{1}{h}$を前に出しました)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x}$$ (対数の性質を利用)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a (1 + \frac{h}{x})$$ (分数を少し変形)

$$= \lim_{h \to 0} \log_a (1 + \frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$ (対数の性質を利用)

$$= \lim_{n \to \infty} \log_a (1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n})^n$$ ($\frac{1}{h} = n$ とおきました)

$$= \log_a e^{\frac{1}{x}}$$ (先ほど「重要な式」と言っていた式を使っています)

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$$ (最後はそれぞれ対数の性質を利用しています)

よって $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log_e a}$ となります。(特に、$(\log x)' = \frac{1}{x}$)

最初にも言ったとおり、高校でやる微積分というのは、これらの基本的な関数を組み合わせたものを微分する、というのがメインです。組合せ方が複雑になると計算もややこしくなってきますが、そういった技術的な練習をするのが主な目的だ、と思ってもらえれば大きくハズレてはいません。

＜まとめ＞

・微積分学の成立以降、具体的に、どういう関数を微分するとどういう形になるのか、という研究が行われた。

・オイラーは指数関数の微分を研究するなかで、e の必要性に気づき、その数を定義した。

3)　冪級数展開

(1) 冪級数展開

＜級数と近似＞

さて、それではオイラーの公式への道を開く最後のカギ、冪級数展開です。

前々回、無限級数の話をしたとき、なぜ級数の形にするか、という話をしました。それは、近似値を計算しやすくするためだ、と。無理数（小数点以下無限に続く数）である e や π は、正確な値を計算することができません。しかし実際にそれを利用する場面では、何らかの有限な値を使う必要があります。そこで、級数の形に表すと、近似値を計算するのに便利だ、という話でした。

この考え方を関数に応用したのが、今回のテーマ、冪級数展開です。関数にはさまざまな形のものがありますが、それを最も簡単な形、つまり多項式関数の形に変形してしまおう、という話です。多項式関数というのは、すでに何度か出てきましたが、学校の数学でよく見かけるような形です。要するに、2 次関数や 3 次関数などもそうですね。

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

という形で表される式です（係数は $a, b, c, \cdots$ と表現されることもありますが、何個になるか具体的には分からないので、$a_1, a_2, \cdots$ で表現しています。a_0 は定数項です）。冪級数展開をするとき、無限級数のときと同じように、n をどこまでも増やしていきたいので、前後の順番を入れ替えて、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

という形にします。それぞれの関数に対して、$a_0, a_1, a_2, \cdots$ の値が具体的に求まれば、その関数は多項式関数の形に書き換えられるわけです（方法についてはあとでやります）。

この形にすることのメリットのひとつめは、やはり近似値が求めやすい、

ということでしょう。たとえば、三角関数の値は $\frac{\pi}{3}(60^\circ)$ や $\frac{\pi}{4}(45^\circ)$ などの特定のもの以外では、ほとんど無理数になるのでした。しかし、

$$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

という形にしてしまえば、もちろん項自体は無限に続いていきますが、途中で計算を打ち切れば、近似値を求めることができます。

もうひとつのメリットは、「四則演算のみで計算できる」ことでしょう。これも例えば $\sin x$ の値などは x の値から直接求めることは難しく、図形的な考察や、加法定理などを利用して計算しなければなりません。しかし、多項式関数の形にすれば、x の値、a_n の値がそれぞれ具体的に与えられる、ということなので、たとえば3次の項であれば、$a_3 \times x \times x \times x$ というふうに掛け算で求めることができます。そして、それらの項を足し算すれば（途中までで打ち切れば）、$f(x)$ の近似値を簡単に求めることができるのです。

＜テイラー展開＞

さて、それでは実際にどうやって冪級数展開をしていくか（多項式に書き換えるか）、という話ですが、その前にまず、練習問題をやってみてください。

【Question 1】

2次関数 $f(x)$ について、$f(0) = 3, f(1) = 5, f(-1) = 7$ とわかっているとき、$f(x)$ はなんでしょう。

【解説】

実は「§1　数学的基盤の整備」の「関数」のところでこの問題はやりました（第4回）。そんなところから伏線をはってみたわけですね。重要な手順ですので、ここでももう一度やっておきましょう。

2次関数は $ax^2 + bx + c$ という形をしています。これの a, b, c が具体的に決まれば、求めたい $f(x)$ がわかるわけです。

$f(x) = ax^2+bx+c$ とすると、$f(0) = c,\quad f(1) = a+b+c,\quad f(-1) = a-b+c$ となります。これらがそれぞれ、3,5,7なので、

$c = 3$

$a + b + c = 5$

$a - b + c = 7$

というわけですね。この連立方程式を解くと、$a = 3, b = -1, c = 3$ とわかるので、$f(x) = 3x^2 - x + 3$ が答えです。

どういう関数になるか、ということを考えるとき、「形が多項式になる」ということが事前にわかっていれば、あとはそれぞれの次数の項の係数を決めることで関数がわかる、ということです。

【Question 2】

2 次関数 $f(x)$ について、$f(0) = 3, f'(0) = 5, f''(0) = 7$ とわかっているとき、$f(x)$ はなんでしょう。

また、3 次関数 $g(x)$ について、$g(0) = 3, g'(0) = 5, g''(0) = 7, g'''(0) = 9$ とわかっているとき、$g(x)$ はなんでしょう。

【解説】

係数についてのヒントの与え方を、微分と絡めてみました。しかしやることは基本的に同じです。まずは 2 次関数のほうから解いてみます。

求めたい 2 次関数を、$f(x) = ax^2 + bx + c$ とします。$f'(0)$ というのは、$f'(x)$ に $x = 0$ を代入した値なので、先に $f'(x)$ を考えておきましょう。

$f'(x) = 2ax + b$ です。同様に、さらに微分して $f''(x) = 2a$ です。

それぞれに $x = 0$ を代入すると、$f(0) = c, \quad f'(0) = b, \quad f''(0) = 2a$ なので、

$c = 3 \qquad b = 5 \qquad 2a = 7$

つまり、$f(x) = \frac{7}{2}x^2 + 5x + 3$ となります。3 次関数のほうも同じように、$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とすると、

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g''(x) = 6ax + 2b$

$g'''(x) = 6a$

より、

$d = 3 \qquad c = 5 \qquad 2b = 7 \qquad 6a = 9$

となり、$g(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + 3$ となります。

さてここで、今の結果を一般化してみましょう。$f(0)$ や $f'(0)$ の値が具体的に与えられていない場合を考えてみます。（以下、$f'''(x)$ や $f'''''(x)$ などのことを、それぞれ $f^{(3)}(x), f^{(5)}(x)$ と表現することにします。肩の数字は微分

した回数を表します。10回も微分すると、$f''''''''''(x)$ みたいになって見づらくなってしまうので。$f^{(0)}(x)$ というのは、1回も微分していないもの、ということなので、つまり $f(x)$ のことです。)

2次関数の方で考えてみます。$c = f^{(0)}(0), \quad b = f^{(1)}(0), \quad 2a = f^{(2)}(0)$ となるので、

$$f(x) = \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + f^{(1)}(0)x + f^{(0)}(0)$$

です。前後の順番を入れ替えると、

$$f(x) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2$$

となります。3次関数の場合も同じように、$d = g^{(0)}(0), \quad c = g^{(1)}(0), \quad 2b = g^{(2)}(0), \quad 6a = g^{(3)}(0)$ となるので、

$$g(x) = g^{(0)}(0) + g^{(1)}(0)x + \frac{g^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{6}x^3$$

となります。関数の次数をあげていくと、右の項も増えていくわけですが、気になるのは係数の分母の値です。ここがどういう規則になっているか、がわかれば、項の形の規則性も分かりそうな気がしませんか。そこで、3次の項の係数の分母、「6」という数字について考えてみましょう（ここが3だったら $1, 2, 3 \cdots$ と順に増えていくのかな、と思えたところですね）。

この6の由来は、$6a = g^{(3)}(0)$ の6です。もうすこし遡ると、$g^{(3)}(x) = 6a$ の6でした。この6はどういう計算をした6かというと、$g^{(2)}(x) = 6ax + 2b$ の1次の項を微分して生まれた「係数6a」からきている6でした。もうひとつ遡ると、この1次の項は $g^{(1)}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ の2次の項を微分して出てきているので、$3a \times 2$ という計算をしていたことがわかります。そして、さらにもう一つ前は、$g^{(0)}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ という形をしていたので、$a \times 3 \times 2$ という計算をしています。もう少し厳密に考えると、先ほど1次の項を微分したときに係数がそのままでしたが、実際には $\times 1$ をしているので、つまり、この6は「$3 \times 2 \times 1$」という計算の答えです。同様に、2次の係数の分母の2は「2×1」ですし、1次の係数の分母の1はそのまま「1」です。$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ は、$n!$ と表現するので、先ほどの関数は、

$$g(x) = g^{(0)}(0) + \frac{g^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

という形をしていることが分かります。

はい。実はこれが、関数を冪級数展開していく技法のひとつ、テイラー展開の基本的なロジックです。左辺がもともと多項式なら、この作業をして元の関数に戻るだけですが、左辺が多項式でない場合、「微分してそれに $x = 0$ を代入する」ということを繰り返していけば、「多項式の形にしたとき」の係数が決まっていきます。たとえば、$\sin x$ は何回も微分すると、$\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin \to \cdots$ というふうになり、それにそれぞれ $x = 0$ を代入した値も求められるので、この方法で多項式に書き換えることができます（もちろん、無限回微分できるので、項は無限に続いていくのですが）。

$$f(x) = f^{(0)}(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$$

今は $x = 0$ の値をそれぞれ利用していますが、形を工夫すると、$x = 0$ 以外でも考えられることができます。厳密に言うと、そうやって $x = 0$ 以外の値も利用できる形のものがテイラー展開であり、この $x = 0$ の値を利用したものはその中でも特にマクローリン展開とよばれます。「テイラー」や「マクローリン」というのは人の名前です。ともに17世紀後半〜18世紀前半の数学者です。テイラー展開が登場したのが1715年『増分法』、マクローリン展開が登場したのが1742年『流率論』とのことなので、マクローリン展開を一般化した、という流れではないようです。マクローリン自身も、「テイラーの論文を参考にしている」と言っているらしいので、$x = 0$ の場合だけ特別に名前が与えられているのは、単純に便利だから、だということのような気もします。

もちろん、すべての関数がテイラー展開可能なわけではないですし、すべての x で一致するわけでもありませんが、学校で習ったような基本的な関数（というより、本講座でこれからテイラー展開したい関数）は、すべての x について元の関数と展開した関数の値が一致します。

＜まとめ＞

・無理数の近似に無限級数を利用したように、関数を冪級数に展開するこ

とで、近似値の計算に利用できる。
・一部の関数は、微分を無限に繰り返すことで、冪級数に展開できる（その方法をテイラー展開という）。

(2) オイラーの公式

それでは実際にいくつかの関数をテイラー展開してみましょう。テイラー展開する対象は、オイラーの公式に登場する $\sin x$、$\cos x$、そして e^x です。

【Question 3】
以下の関数を、それぞれ $x = 0$ においてテイラー展開してください。

$$\sin x = \qquad \cos x = \qquad e^x =$$

【解説】
・$\sin x$
まず先に、$f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x) \cdots$ をそれぞれ用意しておきます（$f'(0)$ というのは、$f(0)$ を微分した値、ではなく、$f(x)$ を微分した関数に $x = 0$ を代入した値、です。そもそも $f(0)$ は定数になるので、微分したら 0 になってしまいます）。
$f(x) = \sin x$ のとき、$f^{(1)}(x) = \cos x$ です。それをさらに微分して $f^{(2)}(x) = -\sin x$。もう一度微分すると、$f^{(3)}(x) = -\cos x$。その次は $f^{(4)}(x) = \sin x$ となるので、以下は繰り返されます。それぞれに $x = 0$ を代入していくと、

$$f(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \cdots$$

というくり返しになります。よって、

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$
$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

となります。残りの $\cos x$ と指数関数については、次回やります。