おとなのための楽しい数学入門

人類の至宝　オイラーの公式　を読み解く

欠席者・途中受講者用資料

＜第12回授業内容＞

§3　オイラーの公式を読み解く

1）　極限

2）　微分

3）　冪級数展開

（1）　冪級数展開

（2）　オイラーの公式

＋α　オイラーの考え方

Ep　オイラーの公式が切り開いた世界

～おわりに　数学を学ぶとはどういうことか～

---

§3　オイラーの公式を読み解く

3）　冪級数展開

(2) オイラーの公式

それでは前回の続き、三角関数と指数関数のテイラー展開からです。

【Question 3】

以下の関数を、それぞれ $x=0$ においてテイラー展開してください。

$\sin x =$　　　　　　$\cos x =$　　　　　　$e^x =$

【解説】

・$\cos x$

これも $\sin x$ のときと同じように、先に $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x) f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), \cdots$ を用意しておきましょう。

$f(x) = \cos x,\ f^{(1)}(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x, \cdots$ となるので、$f(0) = 1,\ f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1, \cdots$ となります。よって、

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^3 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

・e^x

最後に指数関数です。前回微分の話の中で、$(a^x)' = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ という話をして、$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ となる a が e だよ、という話をしました。そうするとつまり、$(e^x)' = e^x$ ということになります。e^x は何回微分しても e^x のままなのです。これを利用すると、$f(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = \cdots = e^x$ となるので、$f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = \cdots = 1$ です。よって、

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

となります。

さて、こうやってテイラー展開した3つの関数を見比べてみて下さい。何かに気づきませんか。

$$\begin{array}{lllllllll}
e^x = 1 & + x & + \frac{1}{2!}x^2 & + \frac{1}{3!}x^3 & + \frac{1}{4!}x^4 & + \cdots\cdots & & & \\
\sin x = & x & & - \frac{1}{3!}x^3 & & + \frac{1}{5!}x^5 & & - \frac{1}{7!}x^7 & + \cdots\cdots \\
\cos x = 1 & & - \frac{1}{2!}x^2 & & + \frac{1}{4!}x^4 & & - \frac{1}{6!}x^6 & + \cdots\cdots &
\end{array}$$

形が少し似ていますね。というより、sin と cos で補えあえば、e^x になりそうな気もします。しかしそのまま足しても e^x にはならないので、少しずつ調整してあげる必要があります。どう調整するか、というのを考えると、オイラーになった気分が味わえるのですが、ヒントとして、今目指してい

るオイラーの公式をもう一度思い出してみましょう。

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
(見やすいように、θだった変数をxに変えています。)

まずe^xをe^{ix}に変えてみましょう。$(ix)^2 = -x^2, (ix)^3 = -ix^3, \cdots$というのは頑張って正確に計算していって下さい。
$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots$
こうなりますね。あとは$\sin x$をi倍します。
$i \sin x = ix - i\frac{1}{3!}x^3 + i\frac{1}{5!}x^5 - i\frac{1}{7!}x^7 + \cdots\cdots$
そして最後の仕上げです。

$$
\begin{array}{lllllllll}
e^{ix} = 1 & + ix & - \frac{1}{2!}x^2 & - i\frac{1}{3!}x^3 & + \frac{1}{4!}x^4 & + i\frac{1}{5!}x^5 & - \frac{1}{6!}x^6 \cdots\cdots & & \\
\cos x = 1 & & - \frac{1}{2!}x^2 & & + \frac{1}{4!}x^4 & & - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\cdots & & \\
i \sin x = & ix & & - i\frac{1}{3!}x^3 & & + i\frac{1}{5!}x^5 & & - i\frac{1}{7!}x^7 + \cdots\cdots &
\end{array}
$$

はい。というわけで、
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
の成立が確認できました。これに$x = \pi$を代入すると、
$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$
オイラーの“等式”になるのでした。

＜まとめ＞
・三角関数と指数関数をそれぞれ冪級数展開し、組み合わせることで、オイラーの公式は導かれる。

＋α　オイラーの考え方

この講座の主な目的は果たされました。富士登山で言うと、ここが頂上です。登頂お疲れ様でした。あとは頂上からの眺めを満喫して下さい……と言いたいところですが、少しいくつか補足をしておきます。
実はオイラー自身は、この公式を導くときに、テイラー展開を使っていません。おそらくは、当時は「微分」という概念が厳密に定義されていなかった、という理由もあるのでしょう。そもそもこの公式が登場する『無限解

析入門』は、微積分への入門書でもあるので、その入口で微分の概念を使うわけにもいかなかった、ということかもしれません。

いずれにせよオイラーは、まずこの公式を最初、ド・モアブルの定理から導いています。

＜ド・モアブルの定理を使った導き方＞

ド・モアブルの定理、というのは、複素数のところでやりましたが、

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると、$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ になる

というものです。（思い出して下さい。）

今、$r = 1$ となる z を考えて、それぞれ n 乗すると、

$$(\cos n\theta + i\sin n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

となりますね (左右を入れ替えていますが)。この θ を $-\theta$ に置き換えると、

$$(\cos n\theta - i\sin n\theta) = (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

となります。($\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta$ です。)

この 2 つの式を足して 2 で割ると、

$$\cos n\theta = \tfrac{1}{2}\{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\}$$

ここで、$\theta = \frac{x}{n}$ として、$n \to \infty$ とすると、$\cos\theta \to 1,\ \sin\theta \to \theta = \frac{x}{n}$ より

$$\cos x = \tfrac{1}{2}\{(1 + i\tfrac{x}{n})^n + (1 - i\tfrac{x}{n})^n\}$$

$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \dfrac{x}{n})^n$ より $\lim_{n\to\infty}(1 + \dfrac{ix}{n})^n = e^{ix}$ なので、

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

となります。同様に、最初の 2 つの式を引いて $2i$ で割ると、

$$\sin x = \tfrac{1}{2i}\{(\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n\}$$

より、

$$\sin x = \tfrac{1}{2i}\{(1 + i\tfrac{x}{n})^n - (1 - i\tfrac{x}{n})^n\} = \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

以上より、

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

となります。

＜テイラー展開によらない冪級数展開＞

さらにオイラーは、冪級数展開を使った方法でも、この公式を導きます。ただし、テイラー展開を使わずに展開しています。

ド・モアブルの定理から、$\cos n\theta = \frac{1}{2}\{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\}$ でした。ここから、二項定理を使って右辺を展開していきます。

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos^n\theta + n\cdot i\cos^{n-1}\sin\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots$
$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos^n\theta - n\cdot i\cos^{n-1}\sin\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta - \cdots$
よって，
$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$

となります。ここで、$\theta = \frac{x}{n}$ として、$n \to \infty$ とすると、

$\frac{(n-a)}{n} \to 1,\ \cos\theta \to 1,\ \sin\theta \to \theta = \frac{x}{n}$ となるので、

$\cos x = 1^n - \frac{1^2}{1\cdot 2}\cdot 1^{n-2}\cdot x^2 + \frac{1^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1^{n-4}\cdot x^4 - \cdots$

$= 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$

$\sin x$ も同様にすると、

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$

となります。
e^x も二項定理によって展開します。
$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\{1^n + n\cdot 1^{n-1}\dfrac{x}{n} + \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot 1^{n-2}(\dfrac{x}{n})^2 + \cdots\}$
$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$
ここからの組み立て方は、テイラー展開を使った方法と同じです。

さらにさらにオイラーは、積分を使った方法でもこの公式を導きます。当時はまだ無限小、無限大の概念がきちんと定義されていなかった時代なので、それぞれ途中でその概念を使うこれらの導き方は、言ってみれば胡散臭く思われるかもしれません。そこでおそらくオイラーは、3つも違う方法で導けたのだから、きっと正しいはず、と考えたのでしょう。

～Epilogue　オイラーの公式が切り開いた世界～

以上で、オイラーの公式が導かれました。ここからは、オイラーの公式が切り開いた世界を眺めていくことにしましょう。
まずは、数学における「オイラーの公式」の意義についてです。

＜三角関数と指数関数の関係＞

この講座でも見てきたように、三角関数と指数関数は、もともと別々に発生し、発展してきたものでした。しかしこの2つの概念が、オイラーの公式を通してつながることになります。例えば、$\sin$ や $\cos$ は、以下のように表すことができます。

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

以前、「負の数」という概念を発明することによって、人類は貯金と借金を同じ土俵で扱うことが出来るようになった、といいましたが、このオイラーの公式によって、三角関数と指数関数を同じ土俵であつかうことができるようになったのです。

ついでなので、これまであつかってきた、三角関数や指数関数の性質にも触れておきましょう。

・加法定理

まずは、加法定理です。加法定理は、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

というものでした。これを、オイラーの公式を使って考えます。まずは、オイラーの公式にそのまま $\theta = (\alpha + \beta)$ を代入してみます。

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

一方で、オイラーの公式に $\theta = \alpha$ を代入したものと $\theta = \beta$ を代入したものを掛けあわせてみるとどうでしょう。

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

この2つは等しいはずなので、実部同士、虚部同士も等しくなければなりません。つまり、

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ということになるのです。これを利用すると、3つ以上の加法定理も考えることができますね。

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=?$，$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=?$

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}e^{i\gamma}$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$$
$$=\cdots$$

（以下、実際に計算してみてください。）

・複素数の極形式

次に、複素数の極形式を考えてみましょう。複素数の極形式は、

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

という形をしていたので、この右辺をオイラーの公式を使って変形すると、

$$z=re^{i\theta}$$

という形になります。複素数同士の積は、

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

となりますね。

・ド・モアブルの定理

ついでに「ド・モアブルの定理」も見てみます。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると、$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

これが、

$z=re^{i\theta}$ とすると、$z^n=r^ne^{in\theta}$

こうなります。

＜三角関数と指数関数の複素数への拡張＞

三角関数と指数関数を同じ土俵で扱えるようになったことにより、三角関数や指数関数は新しい世界に開かれることになります。つまり、複素数の世界です。

三角関数も指数関数も、今まで通りの定義では、$\sin\sqrt{2}$ というものは考えることができても、$\sin i$ などを考えることができないのでした。しかし、オイラーの公式を利用することで、それが可能になるのです。

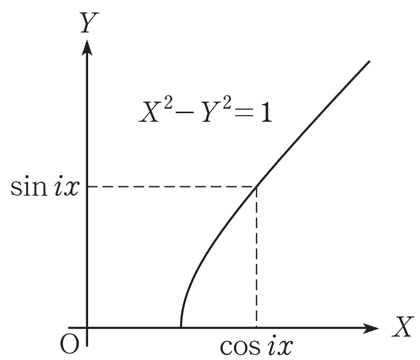
・三角関数

先ほどの三角関数を指数関数で表した式の、x の代わりに ix（x は実数）を入れてみましょう。

$$\sin ix = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x})$$
$$\cos ix = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$$

そうすると、それぞれ上記のようになります。x は実数なので、e^x や e^{-x} は実数であり、$\cos(ix)$ は実数、$\sin(ix)$ は純虚数となります。$\cos(x)$ は x が実数の範囲では $-1 \leq \cos x \leq 1$ の範囲の値しか取りませんでしたが、x に複素数を入れるとそれ以外の実数を取ることもできます。つまり、$\cos x = 2$ などを解くこともできます。（詳しいやり方は省略しますが、$e^{ix} = t$ とすると $\cos x = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ となるので、あとは t の 2 次方程式を解けば答えにたどりつきます。$x = -i\log(2 \pm \sqrt{3})$）

ちなみに、$\sin ix = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x})$、$\cos ix = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$ をそれぞれ x の関数として見たとき、これを図示すると双曲線を表していることが分かります。（方程式としては、$X^2 - Y^2 = 1$ です。三角関数のときと違い、x は特に角度に対応しているというわけではありません。）



・指数関数

指数関数も考えてみます。すなわち、「複素数乗」がどうなるか、という話です。複素数の一般的な形は$x+yi$なので、「$x+yi$乗」を考えましょう。底はまずeのときからです。

$$e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

となり，e^x，$\cos y, \sin y$はそれぞれ実数の範囲で計算できるので，e^{x+yi}の値も計算することができます。底がeでない場合はどうでしょうか。底が一般的な複素数「z」のときを考えてみます。$z=re^{i\theta}$なので、

$$z^{x+yi}=\left(re^{i\theta}\right)^{x+yi}=r^{x+yi}\cdot e^{(i\theta)(x+yi)}=r^x\cdot r^{iy}\cdot e^{ix\theta-y\theta}$$

$$=r^x\cdot r^{iy}\cdot\frac{e^{ix\theta}}{e^{y\theta}}=\frac{r^x}{e^{y\theta}}\cdot r^{iy}\cdot e^{ix\theta}=\frac{r^x}{e^{y\theta}}\cdot e^{i(y\log r+x\theta)}\qquad(※\,r=e^{\log r})$$

$$=\frac{r^x}{e^{y\theta}}(\cos(y\log r+x\theta)+i\sin(y\log r+x\theta))$$

少々複雑ですが、すべて三角関数や指数関数に実数の値を代入したものばかりなので、“何かしら値は出てくる”ということはわかります。

余談ですが、i^iなども求めることができます。$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$なので、

$$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}=0.2079\cdots$$

となるのですが、これを指して「i^i（愛の愛情）は2割そこそこ」という冗談もあります。（厳密には、$i=e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$なので、他にも値があります。）

ちなみに、対数関数も拡張されます。対数関数は、正の値しか入れることができませんでしたが、まずは負の値を入れることができるようになります。例えば、$\log(-1)$は「eを何乗すれば-1になるか」ということですが、$e^{i\pi}=-1$でしたので、$\log(-1)=i\pi$です。これも$i\pi$だけでなく、$i(\pi+2n\pi)$ (nは自然数)ならば成立するので、$i\pi$のことを$\log(-1)$の「主値」と呼びます。

＜複素解析の発展＞

三角関数と指数関数が複素数の世界へ開かれたことで、複素数を変数とする関数の議論ができるようになります。すなわち、複素関数論の登場です。

※　例えば、今なお数学上の未解決問題として有名な「リーマン予想」は、ゼータ関数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

の s に複素数を代入した値を考えます。(「$\zeta(s) = 0$ となるのは，s が負の偶数のとき以外では $\frac{1}{2} + xi$ の形のみである」というのがリーマン予想の中身です。)

複素数を変数とする関数の扱いは、現代数学において欠かせない技術です。また、数学以外の分野においても、必要不可欠な技法になっています。そういった意味では、オイラーの公式は、そして、オイラーの業績は、現代の数学や科学の礎になっていると言えるでしょう。

＜まとめ＞
・オイラーの公式は、それまで別々に発展してきた三角関数と指数関数を結びつける式である。
・オイラーの公式を利用すると、三角関数の重要な性質を、指数関数を通して導くことができる。
・オイラーの公式により、三角関数と指数関数は、複素数の世界へと開かれることになる。
・複素関数への拡張は、数学的理論の発展だけでなく、物理学や電気工学などさまざまな分野で必要不可欠な技法となっている。

おわりに　数学を学ぶとはどういうことか

以上で、本講座はおしまいです。最後までお付き合いいただき、まことにありがとうございました。

以下は、日頃なんとなく考えていることです。
・何のために数学を学ぶのか。
・数学は難しい。
「分からない」からようやくはじまる
数式を読む、数学用語を覚える

概念がわからないのか、計算ができないのか
なぜそうなるか、より、本当にそうなるのか
公式やテクニックに敬意を払う
数学は技術、頭より手を動かす
今までの概念をもとに、新しい次元へと拡張する

・「数学を学ぶ」ことと「数学する」こと。